X1-082 (2012/02/28)

میدان ِ مغناطیسی یِ یک سیملوله یِ نازک

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

پتانسیلها یِ اسکالر و برداری یِ متناظر با یک سیملوله یِ نازک محاسبه میشوند و با استفاده از آنها میدان ِ مغناطیسی یِ متناظر به دست می‌آید.

1 سیملوله یِ نازک

لوله ای را در نظر بگیرید که از سطح ِ آن یک جریان ِ سطحی میگذرد. وقت ی اندازه یِ مقطع ِ لوله به صفر بگراید، سیملوله به یک خم (ِ سمتدار) تبدیل میشود . این خم را با γ نشان میدهیم. به شرط ی که جریان ِ سطحی به شکل ِ مناسب ی بزرگ شود سیملوله مثل ِ یک تُزیع ِ خطی از دُقطبی (یِ مغناطیسی) رفتار میکند. چگالی یِ طولی یِ دُقطبی را با $\boldsymbol{\xi}$ نشان میدهیم. میگوییم این سیملوله یِ نازک آرمانی است، وقت یِ چگالی یِ طولی یِ دُقطبی مماس بر خم باشد، یعنی

$$\boldsymbol{\xi} = \xi \, \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}, \tag{1}$$

که ξ اسکالر است و $\dot{X}$ مشتق ِ تابع ِ یک-متغیره یِ X است. میگوییم این سیملوله یِ نازک ِ آرمانی یکنواخت است، اگر ξ ثابت باشد.

2 پتانسیل ِ اسکالر

پتانسیل ِ (مغناطیسی یِ) اسکالر ِ حاصل از سیملوله را با ϕ نشان میدهیم. داریم

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -(\boldsymbol{\nabla}\phi)(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \notin \mathbb{S} \tag{2}$$

که $\boldsymbol{B}$ میدان ِ مغناطیسی، $\boldsymbol{r}$ مکان، و $\mathbb{S}$ مجموعه یِ نقاط ِ سیملوله یِ نازک است؛ یعنی $\mathbb{S}$ تصویر ِ $\boldsymbol{\gamma}$ است:

$$\mathbb{S} = \boldsymbol{\gamma}([a, b]). \tag{3}$$

پتانسیل ِ اسکالر میشود

$$\phi(\boldsymbol{r}) = K \int_a^b \mathrm{d}t\, |\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)|\, \frac{[\boldsymbol{\xi}(t)] \cdot [\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)]}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)|^3}, \tag{4}$$

که

$$K := \frac{\mu_0}{4\,\pi}, \tag{5}$$

و t پارامتر ِ خم است.

پتانسیل ِ اسکالر ِ حاصل از یک سیملوله یِ نازک ِ آرمانی را با ϕ_{I} نشان میدهیم. با استفاده از (1) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r}) &= K \int_a^b \mathrm{d}t\, [\xi(t)]\, \frac{[\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)] \cdot [\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)]}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)|^3}, \\
&= K \int_a^b \mathrm{d}t\, [\xi(t)]\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)|}, \\
&= K \left[\frac{\xi(b)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(b)|} - \frac{\xi(a)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(a)|}\right] - K \int_a^b \mathrm{d}t\, \frac{\dot{\xi}(t)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)|}.
\end{aligned} \tag{6}$$

جمله یِ اول متناظر با بارها یِ (مغناطیسی یِ) $[-\xi(a)]$ و $[\xi(b)]$ در ابتدا و انتها یِ خم است. جمله یِ دوم هم متناظر با یک چگالی یِ طولی یِ بار (ِ مغناطیسی) به مقدار ِ $(-\dot{\xi})$ است. به این ترتیب، یک سیملوله یِ نازک ِ آرمانی بیرون ِ سیملوله مثل ِ دُ بار در ابتدا و انتها یِ خم ِ متناظر، و یک چگالی یِ طولی یِ بار رو یِ خم ِ متناظر رفتار میکند. رُشن است که اگر این سیملوله یکنواخت هم باشد، چگالی‌یِ‌طولی یِ متناظر صفر میشود و فقط بارها یِ ابتدا و انتهامیمانند:

$$\phi_{\mathrm{IH}}(\boldsymbol{r}) = K \left[\frac{\xi}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(b)|} - \frac{\xi}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(a)|}\right], \tag{7}$$

که ϕ_{IH} پتانسیلِ‌اسکالر ِ متناظر با یک سیملوله یِ نازک ِ آرمانی یِ یکنواخت است.

3 پتانسیل ِ برداری

پتانسیل ِ (مغناطیسی یِ) برداری یِ حاصل از سیملوله) را با $\boldsymbol{A}$ نشان میدهیم. داریم

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})(\boldsymbol{r}). \tag{8}$$

پتانسیل ِ برداری را در پیمانه یِ کولُن [1] حساب میکنیم، که

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0. \tag{9}$$

در این پیمانه،

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = K \int_a^b \mathrm{d}t\ |\dot{\gamma}(t)|\, \frac{[\boldsymbol{\xi}(t)] \times [\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)]}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)|^3}. \tag{10}$$

پتانسیل ِ برداری یِ حاصل از یک سیملوله یِ نازک ِ آرمانی را با $\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}$ نشان میدهیم. با استفاده از (1) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r}) = K \int_a^b \mathrm{d}t\ [\xi(t)]\, \frac{[\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)] \times [\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)]}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)|^3}. \tag{11}$$

سرانجام، پتانسیل ِ برداری یِ حاصل از یک سیملوله یِ نازک ِ آرمانی یِ یکنواخت را با $\boldsymbol{A}_{\mathrm{IH}}$ نشان میدهیم. دیده میشود

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{IH}}(\boldsymbol{r}) = K\, \xi \int_a^b \mathrm{d}t\ \frac{[\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)] \times [\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)]}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)|^3}. \tag{12}$$

4 میدان ِ مغناطیسی

با تعریف ِ

$$\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{r}) = K \int_a^b \mathrm{d}t\ |\dot{\gamma}(t)|\, \frac{\boldsymbol{\xi}(t)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\gamma}(t)|}, \tag{13}$$

دیده میشود

$$\phi = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Xi}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Xi}. \tag{15}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = [\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\Xi)](\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r}\notin\mathbb{S}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = [\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\Xi)](\boldsymbol{r}). \tag{17}$$

از اینجا، با استفاده از

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\Xi) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\Xi) - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\Xi, \tag{18}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\rm o} + \boldsymbol{B}_{\rm i}, \tag{19}$$

که

$$\boldsymbol{B}_{\rm o}(\boldsymbol{r}) := -\,(\boldsymbol{\nabla}\phi)(\boldsymbol{r}), \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_{\rm i}(\boldsymbol{r}) &:= -\,[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\Xi](\boldsymbol{r}),\\ &= 4\,\pi\,K\int_a^b \mathrm{d}t\;|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)|\,\boldsymbol{\xi}(t)\,\delta[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(t)].\end{aligned} \tag{21}$$

$\boldsymbol{B}_{\rm o}$ میدان ِ مغناطیسی یی است که با پتانسیل ِ اسکالر به دست میآید. این میدان شبیه ِ میدان ِ الکتریکی یِ حاصل از دُقطبیها یِ الکتریکی است. اختلاف ِ میدان ِ مغناطیسی با این میدان در $\boldsymbol{B}_{\rm i}$ است، که فقط رو یِ سیملوله ناصفر است.

از جمله برا یِ $\boldsymbol{B}_{\rm IH}$ (میدان ِ مغناطیسی یِ یک سیملوله یِ نازک ِ آرمانی یِ یکنواخت)

$$\boldsymbol{B}_{\rm IH\,o}(\boldsymbol{r}) = K\,\xi\,\left[\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(b)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(b)|^3} - \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(a)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(a)|^3}\right], \tag{22}$$

$$\boldsymbol{B}_{\rm IH\,i}(\boldsymbol{r}) = 4\,\pi\,K\,\xi\int_a^b \mathrm{d}t\;\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\delta[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(t)], \tag{23}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{B}_{\rm IH}(\boldsymbol{r}) = K\,\xi\left\{\left[\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(b)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(b)|^3} - \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(a)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(a)|^3}\right] + 4\,\pi\int_a^b \mathrm{d}t\;\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\delta[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(t)]\right\}. \tag{24}$$

$\boldsymbol{B}_{\rm IH\,o}$ شبیه ِ میدان ِ حاصل از دُ بار ِ قرینه یِ هم است: $(-\xi)$ در سر ِ سیملوله (متناظر با a) و ξ در تَه ِ سیملوله (متناظر با b). این میدان قانون ِ گاؤس [2] برا یِ میدان ِ مغناطیسی را با رویه یِ بستهای

که یک ی از بارها را در بر داشته باشد و دیگری را نَ، برنمی‌آورَد. $\boldsymbol{B}_{\rm IH}$ این قانون را برمی‌آورَد. برا یِ دیدن ِ این، اول رویه ای را در نظر بگیرید که سیم‌لوله را در $\boldsymbol{r}_0$ قطع میکند، که

$$\boldsymbol{r}_0 =: \boldsymbol{\gamma}(t_0). \tag{25}$$

این رویه را با Σو شار ِ مغناطیسی یِ گذرنده از آن را $\psi(\Sigma)$ نشان میدهیم.

$$\psi_{\rm IH\,i}(\Sigma) = 4\,\pi\,K\,\xi\,\int_\Sigma \mathrm{d}S\,\int_a^b \mathrm{d}t\;[\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})\cdot[\dot{\gamma}(t)]\,\delta[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(t)], \tag{26}$$

که $\hat{\boldsymbol{n}}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر Σ است. اگر رویه با معادله یِ

$$f(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{27}$$

مشخص شود،

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}} &= \pm\frac{\boldsymbol{\nabla} f}{|\boldsymbol{\nabla} f|},\\ &=: \zeta\,\frac{\boldsymbol{\nabla} f}{|\boldsymbol{\nabla} f|},\end{aligned} \tag{28}$$

$$\int_\Sigma \mathrm{d}S = \int \mathrm{d}V\;\delta[f(\boldsymbol{r})]\,|\boldsymbol{\nabla} f|, \tag{29}$$

که $\mathrm{d}V$ عنصر ِ حجم است. پس،

$$\begin{aligned}\psi_{\rm IH\,i}(\Sigma) &= 4\,\pi\,K\,\xi\,\zeta\,\int \mathrm{d}V\,\int_a^b \mathrm{d}t\;[(\boldsymbol{\nabla} f)(\boldsymbol{r})]\cdot[\dot{\gamma}(t)]\,\delta[f(\boldsymbol{r})]\,\delta[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(t)],\\ &= 4\,\pi\,K\,\xi\,\zeta\,\int_a^b \mathrm{d}t\;\{(\boldsymbol{\nabla} f)[\gamma(t)]\}\cdot[\dot{\gamma}(t)]\,\delta\{f[\gamma(t)]\},\\ &= 4\,\pi\,K\,\xi\,\zeta\,\mathrm{sgn}\Big(\{(\boldsymbol{\nabla} f)[\gamma(t_0)]\}\cdot[\dot{\gamma}(t_0)]\Big),\\ &= 4\,\pi\,K\,\xi\,\mathrm{sgn}\Big(\{(\boldsymbol{n}[\gamma(t_0)]\}\cdot[\dot{\gamma}(t_0)]\Big).\end{aligned} \tag{30}$$

از اینجا معلوم میشود اگر Σ بسته باشد (و عمود بر آن را طبق ِ قرارداد به سو یِ بیرون بگیریم)؛ و حجم ی که Σ مرز ِ آن است، شامل ِ تَه ِ سیم‌لوله باشد و شامل ِ سر ِ سیم‌لوله نباشد،

$$\psi_{\rm IH\,i}(\Sigma) = -4\,\pi\,K\,\xi. \tag{31}$$

رُشن است که در این حالت،

$$\psi_{\rm IH\,o}(\Sigma) = 4\,\pi\,K\,\xi, \tag{32}$$

و از آنجا،

$$\psi_{\mathrm{IH}}(\Sigma) = 0. \tag{33}$$

5 سیملوله یِ نازکِ آرمانی یِ یکنواختِ خطی

به عنوانِ یک مثال، یک سیملوله یِ نازکِ آرمانی یِ یکنواخت را در نظر بگیرید که خمِ متناظر با آن یک پاره خط است. محورِ z را رو یِ این پاره‌خط میگذاریم. دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{r}) &= K\,\xi\,\hat{\boldsymbol{z}}\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(z-t)^2+\rho^2}},\\ &= K\,\xi\,\hat{\boldsymbol{z}}\,\ln\frac{b-z+\sqrt{(z-b)^2+\rho^2}}{a-z+\sqrt{(z-a)^2+\rho^2}},\end{aligned} \tag{34}$$

که (ρ,φ,z) مختصاتِ استوانه‌ای اند. به این ترتیب از (14) و (15) نتیجه میشود

$$\phi(\boldsymbol{r}) = K\,\xi\,\left[\frac{1}{\sqrt{(z-b)^2+\rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z-a)^2+\rho^2}}\right], \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -K\,\xi\,\rho\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\Bigg\{&\frac{1}{\sqrt{(z-b)^2+\rho^2}\,[b-z+\sqrt{(z-b)^2+\rho^2}]}\\ &- \frac{1}{\sqrt{(z-a)^2+\rho^2}\,[a-z+\sqrt{(z-a)^2+\rho^2}]}\Bigg\},\end{aligned} \tag{36}$$

یا به شکلِ مستقل از مختصات،

$$\phi(\boldsymbol{r}) = K\,\xi\,\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(b)|} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(a)|}\right], \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -K\,\xi\,\hat{\boldsymbol{t}}\times\Bigg(&\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(b)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(b)|\,\{-\hat{\boldsymbol{t}}\cdot[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(b)]+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(b)|\}}\\ &- \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(a)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(a)|\,\{-\hat{\boldsymbol{t}}\cdot[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(a)]+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\gamma}(a)|\}}\Bigg),\end{aligned} \tag{38}$$

که $\hat{\boldsymbol{t}}$ بردارِ یکه یِ مماس بر γ است. تعریف میکنیم

$$F_+ := F(a\to-\infty, b=0), \tag{39}$$

$$F_- := F(a=0, b\to+\infty), \tag{40}$$

$$F_\infty := F(a\to-\infty, b\to+\infty). \tag{41}$$

به این ترتیب دیده میشود

$$\phi_{+}(\boldsymbol{r}) = \frac{K\,\xi}{r}, \tag{42}$$

$$\phi_{-}(\boldsymbol{r}) = -\frac{K\,\xi}{r}, \tag{43}$$

$$\phi_{\infty}(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{44}$$

و

$$\boldsymbol{A}_{+}(\boldsymbol{r}) = \frac{K\,\xi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,\sin\theta}{r\,(1+\cos\theta)}, \tag{45}$$

$$\boldsymbol{A}_{-}(\boldsymbol{r}) = \frac{K\,\xi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,\sin\theta}{r\,(1-\cos\theta)}, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{A}_{\infty}(\boldsymbol{r}) = \frac{2\,K\,\xi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r\,\sin\theta}, \tag{47}$$

که (r,θ,φ) مختصات ِ کروی اند. پتانسیلها یِ برداری به شکل ِ مستقل از مختصات میشوند

$$\boldsymbol{A}_{+}(\boldsymbol{r}) = \frac{K\,\xi\,\hat{\boldsymbol{t}}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r\,(1+\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})}, \tag{48}$$

$$\boldsymbol{A}_{-}(\boldsymbol{r}) = \frac{K\,\xi\,\hat{\boldsymbol{t}}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r\,(1-\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})}, \tag{49}$$

$$\boldsymbol{A}_{\infty}(\boldsymbol{r}) = \frac{2\,K\,\xi\,\hat{\boldsymbol{t}}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r\,[1-(\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})^2]}. \tag{50}$$

پتانسیلها یِ برداری یِ (45) و (46)، یا (48) و (49)، همانها یی اند که در مثلَن [3] به عنوان ِ پتانسیلها یِ تکقطبی یِ مغناطیسی معرفی شده اند. (47) یا (50) هم پتانسیل ِ برداری یِ یک سیملوله یِ نازک ِ آرمانی یِ یکنواخت ِ از دُسو بیپایان است.

6 پانوشتها

[1] Coulomb

[2] Gauss

[3] Jun John Sakurai; “Modern quantum mechanics” (Addison-Wesley, 1995) chapter 2