X1-083 (2012/04/27)

قطبش و فاز ِ نور

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

پارامترها یِ مشخص-کننده یِ قطبش برا یِ نور ِ قطبیده و ناقطبیده معرفی میشوند. ترکیب ِ دُ نور ِ قطبیده، و دستکاری یِ قطبش بررسی میشوند.

0 مقدمه

چگالی یِ شار ِ الکتریکی (بردار ِ جابه‌جایی یِ الکتریکی) یِ یک نور ِ دقیقَن-تکفام به شکل ِ

$$\boldsymbol{D}(t,\boldsymbol{r}) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{\mathcal{D}}\ \exp(-\mathrm{i}\,\omega\,t + \mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1}$$

است، که $\boldsymbol{D}$ چگالی یِ شار ِ الکتریکی، t زمان، $\boldsymbol{r}$ مکان، $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ یک بردار ِ مختلط ِ ثابت، ω بسامد ِ زاویه‌ای، و $\boldsymbol{k}$ بردار ِ مُج است، و

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\mathcal{D}} = 0. \tag{2}$$

به $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ فازُر ِ چگالی یِ شار ِ الکتریکی میگوییم. قطبش ِ چنین-مُج ی را با راستا یِ $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ مشخص میکنند.

عملَن نور ِ دقیقَن-تکفام نداریم. چنین نور ی یک مُج ِ تخت است، که همیشه هست و همه یِ فضا را هم پر میکند. انرژی یِ لازم برا یِ ساختن ِ چنین چیز ی بینهایت است. یک مُج ِ دلبخاه را میشود

بر حسب ِ مُجها ی ِ تخت بسط داد. ممکن است بردارِمُجها ی ِ همه ی ِ سازه‌ها ی ِ مُج نزدیک ِ یک بردار ِ ثابت ($\boldsymbol{k}$) باشند، و طبعًن بسامدزاویه‌ایها ی ِ همه ی ِ سازه‌ها هم نزدیک ِ یک مقدار ِ ثابت (ω) باشند. چگالی ی ِ شار ِ الکتریکی ی ِ نور ی از این گونه را همچنان میشود با (1) نشان داد، اما این بار $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ تابع ی کندتغییر (در مقایسه با نمایی ی ِ ضریب َش) از زمان و مکان است. اگر علاوه بر این، مقیاسها ی ِ زمانی و فضایی ی ِ این تغییرات بسیار کوچکتر از حد ِ تفکیک ِ ابزارها ی ِ سنجش باشند، میگوییم مُج تقریبَن تکفام است. در این صورت عملَن فقط میانگینها ی ِ کمیتها ی ِ ساخته‌شده با فازُر سنجش-پذیر اند. از این پس فقط با مُجها ی ِ تقریبَن تکفام کار میکنیم. همچنین فرض میکنیم $\boldsymbol{k}$ بردار ی حقیقی است.

وقت ی $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ثابت نیست، ممکن است راستا ی ِ $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ هم ثابت نباشد، هر چند $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ بر راستا ی ِ (تقریبَن) ثابت ی عمود باشد. اگر راستا ی ِ $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ثابت باشد، میگویند قطبش ِ مُج معین است، یا مُج قطبیده است. در غیر ِ این صورت میگویند مُج ناقطبیده است. به این ترتیب، رُشن است که یک مُج ِ (دقیقَن) تخت حتمَن قطبیده است.

1 نمایش ِ قطبش

با سنجشها ی ِ شدت بر نور ی که بردارِمُج َش (تقریبَن) $\boldsymbol{k}$ و فازُر ِ چگالی ی ِ شار ِ الکتریکی یَش $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ است، میشود میانگین ِ مجذور ِ اندازه ی ِ تصویر ِ $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ بر یک جهت ِ دلبخاه (ِ عمود بر $\boldsymbol{k}$) را تعیین کرد. چنین-کمیتها یی را با $S(\boldsymbol{v})$ نشان میدهیم:

$$S(\boldsymbol{v}) := \langle |\boldsymbol{v}^\dagger\, \boldsymbol{\mathcal{D}}|^2\rangle, \tag{3}$$

که $\boldsymbol{x}^\dagger$ مزدوج ِ اِرمیتی ی ِ $\boldsymbol{x}$، و $\langle X\rangle$ میانگین ِ X است.

$\boldsymbol{e}_a$ ها را 2 بردار ِ یکه ی ِ عمود بر هم و عمود بر $\boldsymbol{k}$ میگیریم:

$$\boldsymbol{e}_a^\dagger\, \boldsymbol{e}_b = \delta_{a\, b}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot \boldsymbol{e}_b = 0. \tag{5}$$

تعریف میکنیم

$$S^a{}_b := \langle \boldsymbol{e}^{a\,\dagger}\, \boldsymbol{\mathcal{D}}\, \boldsymbol{\mathcal{D}}^\dagger\, \boldsymbol{e}_b\rangle, \tag{6}$$

که شاخصها با δ بالاوپایین میروند. دیده میشود اگر

$$\boldsymbol{v} = v^a\, \boldsymbol{e}_a, \tag{7}$$

آنگاه

$$S(\boldsymbol{v}) = \bar{v}_a\, S^a{}_b\, v^b, \tag{8}$$

که $\bar{X}$ مزدوج ِ مختلط ِ X است. به این ترتیب، با معلوم-بودن ِ ماتریس ِ S که مئلفه‌ها یَش $S^a{}_b$ اند، مقدار ِ $S(\boldsymbol{v})$ به ازا یِ همه یِ $\boldsymbol{v}$ ها معلوم است. بر عکس، با معلوم-بودن ِ $S(\boldsymbol{v})$ به ازا یِ همه یِ $\boldsymbol{v}$ ها ماتریس ِ S معلوم است. دیده میشود

$$S = \langle \boldsymbol{\mathcal{D}}\, \boldsymbol{\mathcal{D}}^\dagger \rangle. \tag{9}$$

به S ماتریس ِ شدت میگوییم.

بردار ِ یکه یِ همجهت با $\boldsymbol{k}$ را با $\hat{\boldsymbol{k}}$ نشان میدهیم. یک انتخاب برا یِ $\boldsymbol{e}_a$ ها این است.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{e}_+ &= \mathrm{i}\, \boldsymbol{e}_+, \\ \hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{e}_- &= \mathrm{i}\, \boldsymbol{e}_-. \end{aligned} \tag{10}$$

یک انتخاب ِ دیگر این است.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{e}_\mathrm{h} &= \boldsymbol{e}_\mathrm{v}, \\ \hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{e}_\mathrm{v} &= -\boldsymbol{e}_\mathrm{h}. \end{aligned} \tag{11}$$

این دُدسته بردار را میشود با این رابطه‌ها به هم مربوط کرد.

$$\boldsymbol{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\, (\boldsymbol{e}_\mathrm{h} \pm \mathrm{i}\, \boldsymbol{e}_\mathrm{v}), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{e}_\mathrm{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, (\boldsymbol{e}_+ + \boldsymbol{e}_-), \tag{13}$$

$$\boldsymbol{e}_\mathrm{v} = \frac{1}{\mathrm{i}\,\sqrt{2}}\, (\boldsymbol{e}_+ - \boldsymbol{e}_-). \tag{14}$$

$\boldsymbol{e}_+$ و $\boldsymbol{e}_-$ متناظر با قطبشها یِ دایره‌ای یِ به ترتیب چپگرد و راستگرد، و $\boldsymbol{e}_\mathrm{h}$ و $\boldsymbol{e}_\mathrm{v}$ متناظر با قطبشها یِ

خطی اند. همچنین، $e(\psi)$ و $f(\psi)$ با

$$\begin{aligned}
e(\psi) &:= e_{\rm h}\ \cos\psi + e_{\rm v}\ \sin\psi, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[e_+\ \exp(-{\rm i}\,\psi) + e_-\ \exp({\rm i}\,\psi)], \\
f(\psi) &:= e\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

متناظر با قطبش ی خطی در راستاها یی است که با چرخش ِ $e_{\rm h}$ به اندازه یِ به ترتیب ψ و $[\psi + (\pi/2)]$ حُل ِ k به دست می‌آید [1].

ماتریس ِ شدت اِرمیتی است، پس شامل ِ 4 پارامتر ِ حقیقی یِ مستقل است. اگر $\mathcal{D}$ را در یک عدد ِ مختلط ِ ثابت (ِ ناصفر) ضرب کنیم، S در مجذور ِ اندازه یِ آن عدد ضرب میشود. با این کار قطبش ِ مُج تغییر نمیکند. 2 ماتریس ِ شدت که با هم متناسب اند متناظر با نورها یی با قطبشها یی یکسان اند. قطبش با 3 پارامتر ِ حقیقی یِ باقیمانده در S مشخص میشود. ماتریس‌ِشدت ِ S اِرمیتی و 2×2 است ، میشود آن را بر حسب چهار ماتریس بسط داد:

$$S = \frac{1}{2}\,s^\mu\,\sigma_\mu, \tag{16}$$

که μ مقدارها یِ 0 تا 3 را میپذیرد و

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= e_+\,e_+^\dagger + e_-\,e_-^\dagger, \\
&= e_{\rm h}\,e_{\rm h}^\dagger + e_{\rm v}\,e_{\rm v}^\dagger, \\
\sigma_1 &= e_+\,e_-^\dagger + e_-\,e_+^\dagger, \\
&= e_{\rm h}\,e_{\rm h}^\dagger - e_{\rm v}\,e_{\rm v}^\dagger, \\
\sigma_2 &= -{\rm i}\,e_+\,e_-^\dagger + {\rm i}\,e_-\,e_+^\dagger, \\
&= e_{\rm h}\,e_{\rm v}^\dagger + e_{\rm v}\,e_{\rm h}^\dagger, \\
\sigma_3 &= e_+\,e_+^\dagger - e_-\,e_-^\dagger, \\
&= -{\rm i}\,e_{\rm h}\,e_{\rm v}^\dagger + {\rm i}\,e_{\rm v}\,e_{\rm h}^\dagger.
\end{aligned} \tag{17}$$

به s^μ ها پارامترها یِ سْتُکس [2] میگویند. s^μ ها حقیقی اند، و

$$s^\mu = {\rm tr}(\sigma^\mu\,S), \tag{18}$$

که شاخصها با δ بالاوپایین میروند. از (3) و (8) دیده میشود ماتریس ِ شدت مثبت ِ شبه‌معین است. به این ترتیب معلوم میشود ویژه‌مقدارها یِ ماتریس ِ شدت نامنفی اند. ویژه‌مقدارها یِ ماتریسِ‌شدت ِ S را با ϖ_1 و ϖ_2 نشان میدهیم. دیده میشود

$$\varpi_1 + \varpi_2 = s^0, \tag{19}$$

$$\varpi_1\, \varpi_2 = (s^0)^2 - (s^1)^2 - (s^2)^2 - (s^3)^2, \tag{20}$$

و از آنجا،

$$s^0 \geq 0, \tag{21}$$

$$(s^0)^2 \geq (s^1)^2 + (s^2)^2 + (s^3)^2. \tag{22}$$

البته حالت ی که s^0 برابر ِ صفر است، حالت ِ بدیهی یی است که کل ِ مُج صفر است. از این پس فرض میکنیم

$$s^0 > 0. \tag{23}$$

تعریف میکنیم

$$P := -\frac{1}{2} + \frac{1}{s^0}\, S. \tag{24}$$

به P ماتریس ِ قطبش میگوییم. دیده میشود ماتریس ِ قطبش با فقط 3 پارامتر ِ حقیقی یِ مستقل مشخص میشود:

$$\mathrm{tr} P = 0. \tag{25}$$

فرق ِ ماتریس ِ قطبش با ماتریس ِ شدت این است که در اولی اطلاعات ِ مربوط به شدت ِ کل حذف شده، و فقط اطلاعات ِ مربوط به قطبش مانده. ماتریسِ‌قطبش ِ P با بردار ِ 3 مثلفه‌ای یِ حقیقی یِ p با مثلفه‌ها یِ (p^1, p^2, p^3) مشخص میشود:

$$P = \frac{1}{2}\, p^j\, \sigma_j, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} p^j &= \frac{s^j}{s^0}, \\ &= \mathrm{tr}(\sigma^j\, P), \end{aligned} \tag{27}$$

که j مقدارها یِ 1 تا 3 را میگیرد، و شاخصها با δ بالاوپایین میروند. به p بردارِ قطبش میگوییم. بینِ بردارها یِ سه‌مئلفه‌ای یِ حقیقی یِ p_1 و p_2 یک ضربِ داخلی تعریف میکنیم.

$$\mathsf{p}_1\cdot\mathsf{p}_2 := \delta_{i\,j}\, p_1^i\, p_2^j. \tag{28}$$

همچنین، طولِ بردارِ p را با p نشان میدهیم و آن را چنین تعریف میکنیم.

$$p := \sqrt{\mathsf{p}\cdot\mathsf{p}}. \tag{29}$$

از (22) و (23) معلوم است که اگر p یک بردارِ قطبش باشد،

$$p \le 1. \tag{30}$$

1.1 نورِ قطبیده

اگر قطبشِ نور معین باشد، یک بردارِ یکه یِ ثابتِ $\boldsymbol{\epsilon}$ هست که

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \mathcal{D}\,\boldsymbol{\epsilon}. \tag{31}$$

که $\mathcal{D}$ یک عددِ مختلط است (که البته ممکن است تابع ی کندتغییر از زمان و مکان باشد). در این صورت،

$$S = \langle|\mathcal{D}|^2\rangle\,\boldsymbol{\epsilon}\,\boldsymbol{\epsilon}^\dagger. \tag{32}$$

به این ترتیب،

$$s^0 = \langle|\mathcal{D}|^2\rangle, \tag{33}$$

و

$$P = \boldsymbol{\epsilon}\,\boldsymbol{\epsilon}^\dagger - \frac{1}{2}. \tag{34}$$

دیده میشود در این حالت P یک ویژه‌مقدارِ $(1/2)$ و یک ویژه‌مقدارِ $(-1/2)$ دارد، متناظر با ویژه‌بردارها یِ به ترتیب $\boldsymbol{\epsilon}$ و $\boldsymbol{u}$، که

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^\dagger\,\boldsymbol{u} = 0. \tag{36}$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ یک بردار ِ یکه یِ مختلط است. پس با 3 پارامتر ِ حقیقی مشخص میشود. اما اگر $\boldsymbol{\epsilon}$ را در یک فاز ضرب کنیم P و S عوض نمیشوند. پس، از 3 پارامتر ِ مشخص-کننده یِ $\boldsymbol{\epsilon}$ فقط 2 تا در قطبش وارد میشوند، یعنی قطبش ِ یک نور ِ قطبیده با 2 پارامتر مشخص میشود. $\boldsymbol{\epsilon}$ را میشود (صرفِنظر از یک فاز که در قطبش وارد نمیشود) چنین نوشت.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{e}_+ \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \xi\right)\right] [\exp(-\mathrm{i}\,\psi)] + \boldsymbol{e}_- \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - \xi\right)\right] [\exp(\mathrm{i}\,\psi)],\\
&= \boldsymbol{e}_\mathrm{h}\,[(\cos\xi)\,(\cos\psi) - \mathrm{i}\,(\sin\xi)\,(\sin\psi)]\\
&\quad + \boldsymbol{e}_\mathrm{v}\,[(\cos\xi)\,(\sin(\psi) + \mathrm{i}\,(\sin\xi)\,(\cos\psi)],\\
&= [\boldsymbol{e}(\psi)]\,\cos\xi + \mathrm{i}\,[\boldsymbol{f}(\psi)]\,\sin\xi,\\
&=: \boldsymbol{e}(\psi,\xi), \qquad (37)
\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}
0 \le \psi < \pi,\\
-\frac{\pi}{4} \le \xi \le \frac{\pi}{4}. \qquad (38)
\end{aligned}$$

بردار ِ p متناظر با $\boldsymbol{e}(\psi,\xi)$ را با $\mathsf{p}(\psi,\xi)$ نشان میدهیم. دیده میشود

$$\begin{aligned}
p^1(\psi,\xi) &= [\cos(2\,\xi)]\,[\cos(2\,\psi)],\\
p^2(\psi,\xi) &= [\cos(2\,\xi)]\,[\sin(2\,\psi)],\\
p^3(\psi,\xi) &= \sin(2\,\xi), \qquad (39)
\end{aligned}$$

و البته

$$p = 1. \qquad (40)$$

پس به جا یِ نمایش ِ قطبش با یک بردار ِ یکه یِ مختلط ِ 2 بُعدی که یک فاز ِ ضربی یَش بی‌اهمیت است، میشود یک بردار ِ یکه یِ حقیقی یِ 3 بُعدی را برا یِ نمایش ِ قطبش به کار برد. مکان ِ هندسی یِ انتها یِ چنین-بردارها یی یک کره به شعاع ِ یک است، که به آن کره یِ پؤَنکَره [3] میگویند. با تعریف ِ

$$\boldsymbol{f}(\psi,\xi) := \boldsymbol{e}\left(\psi + \frac{\pi}{2}, -\xi\right), \qquad (41)$$

دیده میشود

$$[\boldsymbol{f}(\psi,\xi)]^\dagger\,[\boldsymbol{e}(\psi,\xi)]=0. \tag{42}$$

با تعریف ِ

$$\sigma(\psi,\xi):=[p^i(\psi,\xi)]\,\sigma_i, \tag{43}$$

تناظر ِ بین ِ p و ϵ چنین میشود

$$\begin{aligned}&[\sigma(\psi,\xi)]\,[\boldsymbol{e}(\psi,\xi)]=[\boldsymbol{e}(\psi,\xi)],\\&[\sigma(\psi,\xi)]\,[\boldsymbol{f}(\psi,\xi)]=-[\boldsymbol{f}(\psi,\xi)],\\&\sigma(\psi,\xi)=[\boldsymbol{e}(\psi,\xi)]\,[\boldsymbol{e}(\psi,\xi)]^\dagger-[\boldsymbol{f}(\psi,\xi)]\,[\boldsymbol{f}(\psi,\xi)]^\dagger.\end{aligned} \tag{44}$$

همچنین، دیده میشود $(2\,\psi)$ و $(2\,\xi)$ به ترتیب طول ِ جغرافیایی و عرض ِ جغرافیایی ی ِ $\mathsf{p}(\psi,\xi)$ اند. رُشن است که در این حالت (22) هم تساوی میشود:

$$(s^0)^2=(s^1)^2+(s^2)^2+(s^3)^2. \tag{45}$$

تناظر ِ بین ِ قطبش ِ ϵ و بردار ِ قطبش ِ p، هم ان تناظر ِ بین ِ نمایشها ی ِ اسپین-(1/2) و اسپین-1 گروه ِ $\mathrm{SU}(2)$ است. از جمله اگر

$$\boldsymbol{\epsilon}'=U\,\boldsymbol{\epsilon}, \tag{46}$$

که U یکانی است، آنگاه

$$p'^j\,\sigma_j=U\,(p^j\,\sigma_j)\,U^{-1}. \tag{47}$$

وقت ی نور قطبیده است، چگالی ی ِ شار ِ الکتریکی (صرف ِنظر از یک ضریب ِ عددی ی ِ کندتغییر) بر یک بیضی به مرکز ِ مبدئ حرکت میکند، که به آن بیضی ی ِ قطبش میگوییم. اگر محورها ی ِ بزرگ و کوچک ِ بیضی چرخیده ی ِ e_h حُل ِ $\boldsymbol{k}$ با زاویهها ی ِ به ترتیب ψ_1 و ψ_2 باشند، و طولها ی ِ بهنجارشده ی ِ نیممحورها ی ِ بزرگ و کوچک ِ بیضی، به ترتیب r_1 و r_2 باشند، مجذور ِ دامنه ی ِ تصویر ِ چگالی ی ِ شار ِ الکتریکی بر $\boldsymbol{e}(\psi')$ میشود

$$\begin{aligned}S[\boldsymbol{e}(\psi')]&=N\,\{[r_1\,\cos(\psi'-\psi_1)]^2+[r_2\,\sin(\psi'-\psi_1)]^2\},\\&=N\,\left[\frac{r_1^2+r_2^2}{2}+\frac{r_1^2-r_2^2}{2}\,\cos(2\,\psi'-2\,\psi_1)\right],\end{aligned} \tag{48}$$

که N عدد ی متناسب با شدت ِ کل ِ مُج است. با محاسبه یِ مستقیم،

$$S[\boldsymbol{e}(\psi')] = \frac{1}{2}\,\langle|\mathcal{D}|^2\rangle\,\{1+[\cos(2\,\xi)]\,[\cos(2\,\psi'-2\,\psi)]\},$$
$$= \frac{1}{2}\,\langle|\mathcal{D}|^2\rangle\,(1+p^1\,\cos 2\,\psi'+p^2\,\sin 2\,\psi'). \tag{49}$$

به این ترتیب مشخصات ِ بیضی یِ قطبش چنین میشود

$$\psi_1 = \psi,$$
$$\psi_2 = \psi+\frac{\pi}{2},$$
$$\frac{r_1^2-r_2^2}{r_1^2+r_2^2} = \cos(2\,\xi.) \tag{50}$$

قطبش ِ خطی و دایره‌ای، متناظر با به ترتیب $\sin^2(2\,\xi)=0$ و $\sin^2(2\,\xi)=1$ اند. این یعنی قطبش ِ خطی متناظر با بردارِقطبش ی است که انتها یَش در استوا یِ کره یِ پُوَنکَره [3] است، و قطبش ِ دایره‌ای متناظر با بردارِقطبش ی است که انتها یَش در یک یِ از قطبها یِ کره یِ پُوَنکَره [3] است. سمت ِ قطبش (این که بردار ِ چگالی یِ شار ِ الکتریکی دُر ِ بردار ِ مُج ساعتگرد بچرخد یا پادساعتگرد) هم با علامت ِ $\sin\xi$ یا با علامت ِ p^3 (یا هم‌ارز با آن s^3) تعیین میشود. قطبش ِ بیضوی چپگرد (راستگرد) است، اگر p^3 مثبت (منفی) باشد. و البته سمت ِ قطبش در حالت ی تعریف میشود که قطبش خطی نباشد. به این ترتیب میشود به جا یِ طول ِ نیممحور ِ کوچک ِ بیضی یِ قطبش، یک کمیت ِ جبری (علامتدار) به کار برد که اطلاعات ِ مربوط به سمت ِ قطبش را هم در بر دارد. از این پس r_2 را جبری (همعلامت با p^3) میگیریم. برا یِ نور ِ قطبیده، بهنجارش ِ r_1 و r_2 را چنان میگیریم که

$$(r_1)^2+(r_2)^2 = 1. \tag{51}$$

به این ترتیب،

$$r_1 = \cos\xi,$$
$$r_2 = \sin\xi. \tag{52}$$

اینها و همچنین ψ_1 را میشود بر حسبِ مئلفه‌ها یِ بردارِ p نوشت:

$$r_1 = \frac{1+p_\perp}{\sqrt{2\,(1+p_\perp)}},$$
$$r_2 = \frac{p^3}{\sqrt{2\,(1+p_\perp)}},$$
$$\psi_1 = \frac{1}{2}\,\arg(p^1 + \mathrm{i}\,p^2), \tag{53}$$

که $\arg(z)$ زاویه یِ عددِ مختلطِ z است، و

$$p_\perp := \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}. \tag{54}$$

1.2 نورِ ناقطبیده

اگر نور قطبیده نباشد، قطبشِ آن با 3 پارامتر مثلَن هم ان (p^1, p^2, p^3) مشخص میشود. البته در این حالت دیگر (40) لزومَن برقرار نیست. به جا یِ (39) هم داریم

$$p^1(p,\psi,\xi) = p\,[\cos(2\,\xi)]\,[\cos(2\,\psi)],$$
$$p^2(p,\psi,\xi) = p[\,\cos(2\,\xi)]\,[\sin(2\,\psi)],$$
$$p^3(p,\psi,\xi) = p\,[\sin(2\,\xi)], \tag{55}$$

که

$$0 \le p \le 1, \tag{56}$$

و البته رابطه‌ها یِ (38) همچنان برقرار اند. به p (که طولِ بردارِ قطبش است) قطبیده‌گی یا درجه یِ قطبش میگوییم. مکانِ هندسی یِ انتها یِ بردارها یِ قطبش یک گویِ بسته به شعاعِ یک است، که مرز َش هم ان کره یِ پوئَنکَره [3] است. به این گوی گویِ پوئَنکَره [3] میگوییم.

حالتِ قطبش را میشود با یک بیضی‌یِقطبشِ تعمیم-یافته هم بیان کرد. از این پس برا یِ ساده‌گی به این بیضی هم بیضی یِ قطبش میگوییم. بیضی‌یِقطبشِ متناظر با p را مقیاس-شده یِ بیضی‌یِقطبشِ متناظر با p'، با ضریبِمقیاسِ $\sqrt{p}$ تعریف میکنیم، که

$$\mathsf{p}' := \frac{\mathsf{p}}{p}. \tag{57}$$

به این ترتیب پارامترها یِ بیضی‌یِ‌قطبش ِ متناظر با بردارِقطبش ِ p میشوند

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{p + p_\perp}{\sqrt{2\,(p + p_\perp)}}, \\ r_2 &= \frac{p^3}{\sqrt{2\,(p + p_\perp)}}, \\ \psi_1 &= \frac{1}{2}\,\arg(p^1 + \mathrm{i}\,p^2), \end{aligned} \tag{58}$$

دیده میشود

$$(r_1)^2 + (r_2)^2 = p. \tag{59}$$

پس بیضی یِ قطبش محاط در مستطیل ی است که نیمقطر َش $\sqrt{p}$ است. با کاهش ِ قطبیده‌گی، طول ِ بردار ِ قطبش و اندازه یِ بیضی یِ قطبش هردُ کوچک میشوند، تا در $p = 0$ هردُ صفر میشوند. سرانجام، حالت ِ قطبش را میشود با قطبیده‌گی و قطبش هم معین کرد. قطبش را هم ان $\boldsymbol{e}(\psi, \xi)$ میگیریم.

به مُجها یِ متناظر با $p = 1$ و $p = 0$ مُجها یِ به ترتیب (کاملَن) قطبیده و ناقطبیده، و به مُجها یِ متناظر با $0 < p < 1$ مُجها یِ جزئن-قطبیده میگویند.

2 تداخل ِ مُجها یِ قطبیده

دُ نور ِ قطبیده با میدانها یِ الکتریکی یِ $\boldsymbol{\mathcal{D}}_1$ و $\boldsymbol{\mathcal{D}}_2$ و بردارِمُج ِ یکسان را در نظر بگیرید. کمیتها یِ مربوط به مُج ِ ι را با زیرنویس ِ ι، و کمیتها یِ مربوط به مُج ِ برایند را بدون ِ زیرنویس نمایش میدهیم. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\mathcal{D}}_1 + \boldsymbol{\mathcal{D}}_2, \tag{60}$$

و از آنجا،

$$S = S_1 + S_2 + \varepsilon_1\,\varepsilon_2^\dagger\,\langle \mathcal{D}_1\,\bar{\mathcal{D}}_2 \rangle + \varepsilon_2\,\varepsilon_1^\dagger\,\langle \mathcal{D}_2\,\bar{\mathcal{D}}_1 \rangle. \tag{61}$$

داریم

$$|\langle \mathcal{D}_1\,\bar{\mathcal{D}}_2 \rangle| \le \sqrt{\langle |\mathcal{D}_1|^2 \rangle\,\langle |\mathcal{D}_2|^2 \rangle}, \tag{62}$$

که نتیجه میدهد

$$\langle \mathcal{D}_1\,\bar{\mathcal{D}}_2 \rangle = \sqrt{s_1^0\,s_2^0}\,\varrho\,\exp(\mathrm{i}\,\chi), \tag{63}$$

که ϱ و χ حقیقی اند و

$$0 \le \varrho \le 1. \tag{64}$$

پس،

$$S = S_1 + S_2 + \varrho \left[\boldsymbol{\varepsilon}_1\, \boldsymbol{\varepsilon}_2^\dagger \sqrt{s_1^0\, s_2^0}\, \exp(\mathrm{i}\,\chi) + \boldsymbol{\varepsilon}_2\, \boldsymbol{\varepsilon}_1^\dagger \sqrt{s_1^0\, s_2^0}\, \exp(-\mathrm{i}\,\chi)\right]. \tag{65}$$

از جمله،

$$\begin{aligned} s^0 &= s_1^0 + s_2^0 + 2\sqrt{s_1^0\, s_2^0}\, \varrho\, \mathrm{Re}[\boldsymbol{\varepsilon}_2^\dagger\, \boldsymbol{\varepsilon}_1\, \exp(\mathrm{i}\,\chi)], \\ &= s_1^0 + s_2^0 + 2\sqrt{s_1^0\, s_2^0}\, (\varrho\, \cos\alpha)\, \cos\chi', \end{aligned} \tag{66}$$

که

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\varepsilon}_2^\dagger\, \boldsymbol{\varepsilon}_1| &=: \cos\alpha, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^\dagger\, \boldsymbol{\varepsilon}_1 &=: (\cos\alpha)\, \exp(\mathrm{i}\,\beta), \\ \chi + \beta &=: \chi'. \end{aligned} \tag{67}$$

جمله یِ آخر در طرف ِ راست ِ (66) اثر ِ تداخل در شدت ِ مُج ِ برایند را تعیین میکند. در این جمله χ' نماینده یِ اختلاف‌فاز ِ دُمُج است. اما $\cos\chi'$ در دُ عامل ضریب میشود که یک ی (ϱ) نماینده یِ همدوسی یِ دُمُج است. ϱ یک است اگر $\mathcal{D}_2$ حاصل‌ِضرب ِ یک تابع ِ تعینی از زمان در $\mathcal{D}_1$ باشد، و صفر است اگر $\mathcal{D}_2$ و $\mathcal{D}_1$ کاملَن نامربوط به هم باشند. عامل ِ دوم ($\cos\alpha$) اندازه یِ حاصل‌ِضرب ِ درونی یِ ε_1 و ε_2 است. از جمله اگر قطبشها یِ دُموج ِ سازنده بر هم عمود باشند، جمله یِ تداخلی در شدت از بین میرود. α را میشود بر حسب ِ نمایش ِ پُؤنکَره نوشت. از برابری یِ اول در (37) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_2^\dagger\, \boldsymbol{\varepsilon}_1 = &\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \xi_1\right)\right] \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \xi_2\right)\right] \exp(\mathrm{i}\,\psi_2 - \mathrm{i}\,\psi_1) \\ &+ \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - \xi_1\right)\right] \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - \xi_2\right)\right] [\exp(\mathrm{i}\,\psi_2 - \mathrm{i}\,\psi_1)], \end{aligned} \tag{68}$$

و از آنجا،

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{\varepsilon}_2^\dagger\,\boldsymbol{\varepsilon}_1|^2 &= \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\xi_1\right)\right]\,\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\xi_2\right)\right]\\
&\quad+\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\xi_1\right)\right]\,\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\xi_2\right)\right]\\
&\quad+2\,\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\xi_1\right)\right]\,\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\xi_2\right)\right]\,\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-\xi_1\right)\right]\,\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-\xi_2\right)\right]\\
&\qquad\times[\cos(2\,\psi_1-2\,\psi_2)],\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,[\sin(2\,\xi_1)]\,[\sin(2\,\xi_2)]+\frac{1}{2}\,[\cos(2\,\xi_1)]\,[\cos(2\,\xi_2)]\,[\cos(2\,\psi_1-2\,\psi_2)].
\end{aligned}
\tag{69}
$$

به این ترتیب،

$$
\begin{aligned}
\cos 2\,\alpha &= 2\,\cos^2\alpha-1,\\
&=[\sin(2\,\xi_1)]\,[\sin(2\,\xi_2)]+[\cos(2\,\xi_1)]\,[\cos(2\,\xi_2)]\,[\cos(2\,\psi_1-2\,\psi_2)].
\end{aligned}
\tag{70}
$$

طرف ِ راست کسینوس ِ زاویه یِ بین ِ بردارها یِ p_1 و p_2 است. پس α نصف ِ زاویه یِ بین ِ بردارها یِ p_1 و p_2 است:

$$
\alpha=\frac{1}{2}\,\cos^{-1}(\mathsf{p}_1\cdot\mathsf{p}_2).
\tag{71}
$$

از جمله دُ قطبش بر هم عمود اند، اگر و تنها اگر متناظر با نقاط ی متقاطر با هم بر کره یِ پُوَنکَره [3] باشند.

3 دستکاری یِ قطبش

با گذشتن ِ نور از دستگاه ی بدون ِ تلف یا تقویت، که در آن ضریبِشکست برا یِ قطبشها یِ مختلف فرق میکند، قطبش ِ نور عوض میشود. متناظر با بردارِمُج ِ $\boldsymbol{k}$، بردارها یِ $\boldsymbol{e}(\psi_a,\xi_a)$ با

$$
\begin{aligned}
\psi_2 &= \psi_1+\frac{\pi}{2},\\
\xi_2 &= -\xi_1
\end{aligned}
\tag{72}
$$

را ویژه‌قطبش میگیریم. این یعنی اگر نور ی که قطبش َش $\boldsymbol{e}(\psi_a,\xi_a)$ باشد وارد ِ دستگاه شود، نور ِ خروجی هم قطبش َش هم ان است، فقط فازر ِ چگالی‌یِشار َش در $\exp(\mathrm{i}\,\vartheta_a)$ ضرب شده. به این ترتیب دیده میشود اگر نور ی با ماتریسِشدت ِ S وارد ِ دستگاه شود، ماتریس ِ شدت ِ نور ِ خروجی S' خاهد بود، که در پایه یِ $\boldsymbol{e}(\psi_a,\xi_a)$ ها

$$S'^a{}_b = \{\exp[\mathrm{i}\,(\vartheta_a - \vartheta_b)]\}\, S^a{}_b, \tag{73}$$

یا به شکل ِ بسته

$$S' = U\, S\, U^{-1}, \tag{74}$$

که U یک ماتریس ِ یکانی است که $\boldsymbol{e}(\psi_a,\xi_a)$ ها ویژه‌بردارها یَش اند:

$$U\,[\boldsymbol{e}(\psi_a,\xi_a)] = [\exp(\mathrm{i}\,\vartheta_a)]\,[\boldsymbol{e}(\psi_a,\xi_a)]. \tag{75}$$

رُشن است که

$$[\boldsymbol{e}(\psi_1,\xi_1)]^\dagger\,[\boldsymbol{e}(\psi_2,\xi_2)] = 0. \tag{76}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} U = {}& \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right]\ \left\{\left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{2}\right)\right]\ [\boldsymbol{e}(\psi_1,\xi_1)]\,[\boldsymbol{e}(\psi_1,\xi_1)]^\dagger \right.\\ &\left. + \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2}\right)\right]\ [\boldsymbol{f}(\psi_1,\xi_1)]\,[\boldsymbol{f}(\psi_1,\xi_1)]^\dagger\right\},\\ = {}& \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right]\ \exp\left[\left(\mathrm{i}\,\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{2}\right)\ \sigma(\psi_1,\xi_1)\right]. \end{aligned} \tag{77}$$

ضریبِشکست برا یِ قطبش ِ $\boldsymbol{e}(\psi_a,\xi_a)$ را با n_a نشان میدهیم. داریم

$$\vartheta_a = 2\,\pi\, n_a\,\frac{\ell}{\lambda}, \tag{78}$$

که λ طولِمُج در خلئ، و ℓ طول ِ مسیر ِ نور در دستگاه است. به این ترتیب،

$$S' = \tilde U\, S\, \tilde U^{-1}, \tag{79}$$

که

$$\begin{aligned} \tilde U &:= \exp\left[-\mathrm{i}\,\frac{\vartheta}{2}\,\sigma(\psi_1,\xi_1)\right],\\ \vartheta &:= 2\,\pi\,(n_2-n_1)\,\frac{\ell}{\lambda}. \end{aligned} \tag{80}$$

پس اثر ِ چنین محیط ی بر قطبش را میشود چنین تُصیف کرد. قطبیده‌گی تغییر نمیکند. اگر قطبش ِ مُج ِ ورودی $\boldsymbol{\epsilon}$ و بردار ِ قطبش ِ مُج ِ ورودی p باشد (که طول َش لزومَن یک نیست)، قطبش ِ مُج ِ خروجی $\boldsymbol{\epsilon}'$ و بردار ِ قطبش ِ مُج ِ خروجی p' است، که

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \tilde{U}\,\boldsymbol{\epsilon}, \tag{81}$$

$$p'^j\,\sigma_j = \tilde{U}\,(p^j\,\sigma_j)\,\tilde{U}^{-1}. \tag{82}$$

رابطه یِ اخیر میشود

$$\mathsf{p}' = \{R[\vartheta\,\mathsf{p}(\psi_1,\xi_1)]\}\,\mathsf{p}, \tag{83}$$

که $R[\vartheta\,\mathsf{p}(\psi_1,\xi_1)]$ دَوَران به اندازه یِ ϑ حُل ِ $\mathsf{p}(\psi_1,\xi_1)$ است. دیده میشود p' یک تابع ِ دُره‌ای با دُره یِ $(2\,\pi)$ از ϑ است.

3.1 دُشکستی یِ ناتکدست

دُشکستی یِ ناتکدست به ماده ای میگوییم که متناظر با هر بردارِمُج ِ $\boldsymbol{k}$ صفحه ای شامل ِ آن بردار دارد چنان که ویژه‌قطبشها ویژه‌بردارها یِ انعکاس در آن صفحه اند. ماتریس ِ انعکاس در پایه یِ $\boldsymbol{e}_{\mathrm{h}}$ و $\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}$ حقیقی و متقارن است. از اینجا نتیجه میشود ویژه‌بردارها یِ آن ترکیبها یِ خطی یِ حقیقی از $\boldsymbol{e}_{\mathrm{h}}$ و $\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}$ اند. این یعنی ویژه‌قطبشها یِ $\boldsymbol{e}(\psi_a,\xi_a)$ چنان اند که

$$\xi_a = 0, \tag{84}$$

یعنی ویژه‌قطبشها قطبشها یِ خطی اند. $\boldsymbol{\epsilon}$ (قطبش ِ ورودی) را بر حسب ِ $\boldsymbol{e}(\psi_a,\xi_a)$ ها بسط میدهیم:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon} &= [\boldsymbol{e}(\psi_1)]\,[(\cos\xi)\,(\cos\psi) - \mathrm{i}\,(\sin\xi)\,(\sin\psi)]\\ &\quad + [\boldsymbol{f}(\psi_1)]\,[(\cos\xi)\,(\sin(\psi) + \mathrm{i}\,(\sin\xi)\,(\cos\psi)].\end{aligned} \tag{85}$$

$\boldsymbol{\epsilon}'$ (قطبش ِ خروجی) چنین میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}' &= [\boldsymbol{e}(\psi_1)]\,\left[\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\vartheta}{2}\right)\right]\,[(\cos\xi)\,(\cos\psi) - \mathrm{i}\,(\sin\xi)\,(\sin\psi)]\\ &\quad + [\boldsymbol{f}(\psi_1)]\,\left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\vartheta}{2}\right)\right]\,[(\cos\xi)\,(\sin(\psi) + \mathrm{i}\,(\sin\xi)\,(\cos\psi)].\end{aligned} \tag{86}$$

یک حالت ِ خاص این است که قطبش ِ ورودی دایره‌ای (مثلَن چپگرد) باشد:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\exp(-\mathrm{i}\,\psi)]}{\sqrt{2}}\,[\boldsymbol{e}(\psi_1) + \mathrm{i}\,\boldsymbol{f}(\psi_1)]. \tag{87}$$

در این صورت،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}' &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\boldsymbol{e}(\psi_1)]\,\left[\cos\left(\psi + \frac{\vartheta}{2}\right) - \mathrm{i}\,\sin\left(\psi + \frac{\vartheta}{2}\right)\right]\\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\boldsymbol{f}(\psi_1)]\,\left[\sin\left(\psi - \frac{\vartheta}{2}\right) + \mathrm{i}\,\cos\left(\psi - \frac{\vartheta}{2}\right)\right],\\ &= \left\{\exp\left[\mathrm{i}\,\left(\frac{\pi}{4} - \psi\right)\right]\right\}\,\boldsymbol{e}_{\psi_1}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right),\end{aligned} \tag{88}$$

که

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_{\psi_1}(\psi,\xi) &:= [\boldsymbol{e}(\psi_1)]\,[(\cos\xi)\,(\cos\psi) - \mathrm{i}\,(\sin\xi)\,(\sin\psi)]\\ &\quad + [\boldsymbol{f}(\psi_1)]\,[(\cos\xi)\,(\sin(\psi) + \mathrm{i}\,(\sin\xi)\,(\cos\psi)].\end{aligned} \tag{89}$$

چنان که انتظار میرفت ψ در قطبش اثر ی ندارد. خروجی یک مُج ِ بیضوی-قطبیده است، که محورها یِ بیضی‌یِ‌قطبش َش نیمسازها یِ راستاها یِ $\boldsymbol{e}(\psi_1)$ و $\boldsymbol{f}(\psi_1)$ اند. مُج ِ خروجی وقت ی ϑ صفر است چپگرد، وقت ی ϑ برابر با $(\pi/2)$ است خطی-قطبیده در رساتا یِ نیمساز ِ $\boldsymbol{e}(\psi_1)$ و $[-\boldsymbol{f}(\psi_1)]$، وقت ی ϑ برابر با π است راستگرد، وقت ی ϑ برابر با $(3\,\pi/2)$ است خطی-قطبیده در رساتا یِ نیمساز ِ $\boldsymbol{e}(\psi_1)$ و $\boldsymbol{f}(\psi_1)$، و وقت ی ϑ برابر با $(2\,\pi)$ است باز چپگرد است.

3.2 محیط ِ اپتیکیفعال

اگر محیط همسانگرد باشد، ویژه‌قطبشها یِ متناظر با هر بردارِمُج ِ $\boldsymbol{k}$ ویژه‌بردار ِ دَوَران حُل ِ $\boldsymbol{k}$ اند (مگر ضریبِشکست برا یِ همه یِ قطبشها یکسان باشد ، که در این صورت هر بردار ِ عمود بر $\boldsymbol{k}$ ویژه‌قطبش است). پس ویژه‌قطبشها قطبشها یِ چپگرد و راستگرد اند:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{\pi}{4},\\ \xi_2 &= -\frac{\pi}{4}.\end{aligned} \tag{90}$$

به چنین محیط ی اپتیکیفعال میگوییم. $\boldsymbol{\epsilon}$ (قطبش ِ ورودی) را میشود (صرف‌نِظر از یک فاز که در قطبش وارد نمیشود) چنین نوشت.

$$\boldsymbol{\epsilon}=\boldsymbol{e}_+\ \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\xi\right)\right]\ [\exp(-\mathrm{i}\,\psi)]+\boldsymbol{e}_-\ \left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-\xi\right)\right]\ [\exp(\mathrm{i}\,\psi)]. \tag{91}$$

$\boldsymbol{\epsilon}'$ (قطبش ِ خروجی) چنین میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}'=\boldsymbol{e}_+\ &\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\xi\right)\right]\ \left[\exp\left(-\mathrm{i}\,\psi-\mathrm{i}\,\frac{\vartheta}{2}\right)\right]\\ &+\boldsymbol{e}_-\ \left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-\xi\right)\right]\ \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\psi+\mathrm{i}\,\frac{\vartheta}{2}\right)\right].\end{aligned} \tag{92}$$

یک حالت ِ خاص این است که قطبش ِ ورودی خطی باشد:

$$\boldsymbol{\epsilon}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\{\boldsymbol{e}_+\,[\exp(-\mathrm{i}\,\psi)]+\boldsymbol{e}_-\,[\exp(\mathrm{i}\,\psi)]\}. \tag{93}$$

در این صورت،

$$\boldsymbol{\epsilon}'=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\left\{\boldsymbol{e}_+\ \left[\exp\left(-\mathrm{i}\,\psi-\mathrm{i}\,\frac{\vartheta}{2}\right)\right]+\boldsymbol{e}_-\ \left[\exp\left(\mathrm{i}\,\psi+\mathrm{i}\,\frac{\vartheta}{2}\right)\right]\right\}. \tag{94}$$

پس قطبش خطی میمانَد، اما جهت ِ قطبش به اندازه یِ $(\vartheta/2)$ حُل ِ $\boldsymbol{k}$ میچرخد.

4 پانوشتها

[1] John David Jackson; “classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1999) section 7.2

[2] Stokes

[3] Poincaré