X1-084 (2012/05/26)

مدارها یِ خیزیده

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

جریان، چگالی یِ بار، و نیرو یِ محرکه یِ الکترُمُتُری در یک سیم، و اثر ِ خیز بر آنها بررسی میشود.

0 مقدمه

با چگالی یِ جریان و چگالی یِ بار یک چاربردار ساخته میشود. به این ترتیب اثر ِ خیز (یا یک تبدیل ِ کلیتر ِ لُرِنتس [1]) بر چگالی یِ جریان و چگالی یِ بار چنین است.

$$J'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, J^{\nu}, \qquad (1)$$

که J^0 چگالی یِ بار، و J^j مئلفه یِ j ِ چگالی یِ جریان است. J' چاربردار ِ تبدیل-یافته، و Λ تبدیل است. در کل ِ این متن شاخصها یِ لاتین فقط مقدار ِ فضایی (ناصفر) میگیرند، و شاخصها یِ یونانی مقدارها یِ زمانی (صفر) و فضایی (ناصفر) هردُ را میگیرند. همچنین بردارها یِ سه‌مئلفه‌ای (فضایی) را با حروف ِ سیاه نشان میدهیم.

اگر Λ یک خیز با سرعتِ $\boldsymbol{v}$ باشد، (1) میشود

$$\rho' = [\gamma(\boldsymbol{v})]\,(\rho + c^{-2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{J}), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{J}'_{\parallel} = [\gamma(\boldsymbol{v})]\,(\boldsymbol{J}_{\parallel} + \boldsymbol{v}\,\rho), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{J}'_{\perp} = \boldsymbol{J}_{\perp}, \tag{4}$$

که γ ضریبِ لُرِنتس [1] است:

$$\gamma(\boldsymbol{v}) := (1 - c^{-2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})^{-1/2}. \tag{5}$$

ρ هم ان J^0 (چگالی یِ بار) است، و $\boldsymbol{X}_{\parallel}$ و $\boldsymbol{X}_{\perp}$ بخشها یِ به ترتیب موازی-با و عمود-بر-سرعتِ $\boldsymbol{X}$ اند:

$$\boldsymbol{X}_{\parallel} := \frac{\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{X})}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}},$$

$$\boldsymbol{X}_{\perp} := \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{\parallel}. \tag{6}$$

با میدانِ الکتریکی ($\boldsymbol{E}$) و میدانِ مغناطیسی ($\boldsymbol{B}$) هم یک تانسرِ پادمتقارن (F) ساخته میشود، که در اثرِ یک تبدیلِ لُرِنتس [1] چنین تبدیل میشود.

$$F'_{\mu\,\nu} = \Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\,\Lambda_{\nu}{}^{\beta}\,F_{\alpha\,\beta}, \tag{7}$$

که

$$F_{i\,0} = E_i, \tag{8}$$

$$F_{i\,j} = \varepsilon^{k}{}_{ij}\,B_k, \tag{9}$$

و ε تانسُرِ لِوی-چیویتا [2] است. از جمله اگر Λ یک خیز با سرعتِ $\boldsymbol{v}$ باشد،

$$\boldsymbol{E}'_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{E}'_{\perp} = [\gamma(\boldsymbol{v})]\,(\boldsymbol{E}_{\perp} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_{\perp}), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{B}'_{\parallel} = \boldsymbol{B}_{\parallel}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B}'_{\perp} = [\gamma(\boldsymbol{v})]\,(\boldsymbol{B}_{\perp} + c^{-2}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}_{\perp}). \tag{13}$$

اینها را میشود در مثلَن [3] یافت.

تبدیل ِ جریان و چگالی یِ طولی یِ بار در یک مدار پیچیده‌تر است. هم رابطه یِ جریان ِ گذرنده از یک مدار ِ متحرک با چگالی یِ جریان در آن مدار هم ان رابطه ای نیست که برا یِ مدارها یِ ساکن برقرار است، و هم باید تبدیل ِ مدار را در نظر گرفت. در تبدیل ِ نیرو یِ محرکه یِ الکترُمُتُری هم، علاوه بر تبدیل ِ میدانها باید تبدیل ِ مدار را هم در نظر گرفت.

1 چگالی یِ جریان، و جریان

جریان ی که از یک رویه یِ ساکن میگذرد، انتگرال ِ چگالی یِ جریان بر آن رویه است:

$$I(\mathbb{S}) = \int_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J}, \tag{14}$$

که $I(\mathbb{S})$ جریان ِ گذرنده از رویه یِ سمتدار ِ $\mathbb{S}$ است. اگر رویه متحرک باشد، جریان از (14) به دست نمی‌آید. برا یِ دیدن ِ این، بخش ِ کوچک ِ $\Delta\mathbb{S}$ از رویه را در نظر بگیرید، که بردارِمساحت َش $\Delta\boldsymbol{S}$ است و در زمان ِ t در نقطه یِ $\boldsymbol{r}$ است. اگر سرعت ِ رویه (در آن نقطه) $\boldsymbol{v}$ باشد، این بخش از رویه در زمان ِ $(t+\delta t)$ در $(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})$ است، که

$$\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\delta t. \tag{15}$$

بارها یی را در نظر بگیرید که سرعت ِشان $\boldsymbol{v}_a$ است. یک استوانه یِ مایل هست که بارها یی از این گونه که درون ِ آن اند، طی ِ بازه یِ $[t, t+\delta t]$ از رویه میگذرند. یک قاعده یِ این استوانه در $\boldsymbol{r}$، و یک قاعده یِ دیگر ِ آن در $\tilde{\boldsymbol{r}}_a$ است، که

$$\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r} = \tilde{\boldsymbol{r}}_a + \boldsymbol{v}_a\,\delta t. \tag{16}$$

δV_a (حجم ِ این استوانه) میشود

$$\delta V_a = (\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}_a)\cdot\Delta\boldsymbol{S}. \tag{17}$$

$I_a(\Delta\mathbb{S})$ را آهنگ ِ گذشتن ِ بار ِ از گونه یِ a از $\Delta\boldsymbol{S}$ تعریف میکنیم. به این ترتیب،

$$I_a(\Delta\mathbb{S}) = \rho_a\,(\boldsymbol{v}_a-\boldsymbol{v})\cdot\Delta\boldsymbol{S}, \tag{18}$$

که ρ_a چگالی یِ بار ِ از گونه یِ a است. جریان ِ کل مجموع ِ I_a ها ست. پس،

$$I(\Delta\mathbb{S}) = \sum_a \rho_a\,(\boldsymbol{v}_a-\boldsymbol{v})\cdot\Delta\boldsymbol{S}. \tag{19}$$

داریم

$$\rho = \sum_a \rho_a, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{J} = \sum_a \rho_a\, \boldsymbol{v}_a, \tag{21}$$

که ρ چگالی یِ بار است. از اینجا

$$I(\mathbb{S}) = \int_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{J}-\rho\,\boldsymbol{v}). \tag{22}$$

2 جریان در مدار ِ خیزیده

یک لوله یِ جریان را در نظر بگیرید که ساکن است. و از آن جریان ِ مانا یِ I میگذرد. منظور از مانا این است که چگالی یِ بار و چگالی یِ جریان مستقل از زمان اند، و چگالی یِ جریان در مرز ِ لوله مماس بر لوله است. این که چگالی یِ بار مستقل از زمان است نتیجه میدهد دیورژانس ِ چگالی یِ جریان صفر است. از این، همراه با این که چگالی یِ جریان در مرز ِ لوله مماس بر لوله است نتیجه میشود جریان ی که از یک مقطع ِ ساکن ِ لوله میگذرد مستقل از شکل و جا یِ مقطع است:

$$\int_{\mathbb{S}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} = \int_{\mathbb{S}_1} \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J}, \tag{23}$$

که $\mathbb{S}_1$ و $\mathbb{S}_2$ دُ مقطع ِ لوله با سمت ِ یکسان اند. از (14) و (23) دیده میشود جریان ِ گذرنده از همه یِ مقطعها یِ ساکن ِ لوله یکسان است.

لوله را با سرعت ِ ثابت ِ $\boldsymbol{v}$ میخیزانیم. زمان و مکان ِ نخیزیده را با $(t,\boldsymbol{r})$، و زمان و مکان ِ خیزیده را $(t',\boldsymbol{r}')$ نشان میدهیم:

$$t' = [\gamma(\boldsymbol{v})]\,(t + c^{-2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}), \tag{24}$$

$$\boldsymbol{r}'_{\parallel} = [\gamma(\boldsymbol{v})]\,(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\,t), \tag{25}$$

$$\boldsymbol{r}'_{\perp} = \boldsymbol{r}_{\perp}. \tag{26}$$

خیزیده یِ مقطع ِ $\mathbb{S}$ را با $\mathbb{S}'$، و جریان ِ گذرنده از آن را با I' نشان میدهیم. $\mathbb{S}'$ با سرعت ِ $\boldsymbol{v}$ حرکت

میکند. از (2) و (3) نتیجه میشود

$$(\boldsymbol{J}'-\rho'\,\boldsymbol{v})_{\parallel}=[\gamma(\boldsymbol{v})]\,[\boldsymbol{J}_{\parallel}-c^{-2}\,\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{J})],$$
$$=[\gamma(\boldsymbol{v})]^{-1}\,\boldsymbol{J}_{\parallel}. \tag{27}$$

برا یِ محاسبه یِ I'، توجه میکنیم که طرف ِ راست ِ (22) در t' ِ ثابت محاسبه میشود. از (24) تا (26) نتیجه میشود

$$\Delta\boldsymbol{S}'_{\parallel}=\Delta\boldsymbol{S}_{\parallel}, \tag{28}$$

$$\Delta\boldsymbol{S}'_{\perp}=[\gamma(\boldsymbol{v})]^{-1}\,\Delta\boldsymbol{S}_{\perp}. \tag{29}$$

به این ترتیب، از (27) و (28)، و از (4) و (29)، به ترتیب نتیجه میشود

$$(\boldsymbol{J}'-\rho'\,\boldsymbol{v})_{\parallel}\cdot\Delta\boldsymbol{S}'_{\parallel}=[\gamma(\boldsymbol{v})]^{-1}\,\boldsymbol{J}_{\parallel}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_{\parallel}, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{J}'_{\perp}\cdot\Delta\boldsymbol{S}'_{\perp}=[\gamma(\boldsymbol{v})]^{-1}\,\boldsymbol{J}_{\perp}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_{\perp}, \tag{31}$$

و از آنجا،

$$(\boldsymbol{J}'-\rho'\,\boldsymbol{v})\cdot\Delta\boldsymbol{S}'=[\gamma(\boldsymbol{v})]^{-1}\,\boldsymbol{J}\cdot\Delta\boldsymbol{S}, \tag{32}$$

که نتیجه میدهد

$$I'=[\gamma(\boldsymbol{v})]^{-1}\,I. \tag{33}$$

این نتیجه را با یک روش ِ دیگر هم میشد به دست آورد. بار ِ δQ طی ِ زمان ِ δt از مدار ِ نخیزیده میگذرد. هم ین بار طی ِ زمان ِ $\delta t'$ از مدار ِ خیزیده میگذرد. از

$$\delta t'=[\gamma(\boldsymbol{v})]\,\delta t, \tag{34}$$

(مدار ِ نخیزیده ساکن است) رابطه یِ (33) نتیجه میشود.

3 چگالی یِ طولی یِ بار در مدار ِ خیزیده

یک مدار ِ نازک ِ سمتدار را در نظر بگیرید. بردار ِ یکه یِ مماس بر آن در جهت ِ افزایش ِ پارامتر ِ مدار را با $\hat{\boldsymbol{n}}$ نشان میدهیم. طول‌ِقُس ِ جبری در راین مدار را با s نشان میدهیم. δs طول‌ِقُس ِ جبری از

$\boldsymbol{r}$ تا $(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})$ است:

$$\delta\boldsymbol{r}=\hat{\boldsymbol{n}}\,\delta s. \tag{35}$$

این مدار را با سرعتِ $\boldsymbol{v}$ میخیزانیم. برا یِ محاسبه یِ چگالی یِ طولی یِ بار در مدارِ خیزیده، بار ی که در زمانِ t' بینِ نقطه‌ها یِ $\boldsymbol{r}'$ و $(\boldsymbol{r}'+\delta\boldsymbol{r}')$ در مدار است را در نظر بگیرید. این بار را با $\delta Q'$ نشان میدهیم. رویدادها یِ $(t',\boldsymbol{r}')$ و $(t',\boldsymbol{r}'+\delta\boldsymbol{r}')$ خیزیده یِ رویدادها یِ $(t,\boldsymbol{r})$ و $(t+\delta t,\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})$ اند. $\delta Q'$ برابر است با δQ (بار ی که در زمانِ t بینِ $\boldsymbol{r}$ و $(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})$ در مدارِ ساکن بوده)، منها یِ بار ی که بینِ زمانها یِ t و $(t+\delta t)$ از نقطه یِ $(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})$ بیرون رفته:

$$\delta Q'=\delta Q-\frac{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\delta\boldsymbol{r}}{|\delta\boldsymbol{r}|}\,I\,\delta t. \tag{36}$$

از این که رویدادها یِ پریمدار خیزیده یِ رویدادها یِ بدونِ پریم اند، نتیجه میشود

$$\delta t=-[\gamma(\boldsymbol{v})]\,c^{-2}\,\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}', \tag{37}$$

$$\delta\boldsymbol{r}_\parallel=[\gamma(\boldsymbol{v})]\,\delta\boldsymbol{r}'_\parallel, \tag{38}$$

$$\delta\boldsymbol{r}_\perp=\,\delta\boldsymbol{r}'_\perp, \tag{39}$$

یا

$$\delta t=-c^{-2}\,\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}, \tag{40}$$

$$\delta\boldsymbol{r}'_\parallel=[\gamma(\boldsymbol{v})]^{-1}\,\delta\boldsymbol{r}_\parallel, \tag{41}$$

$$\delta\boldsymbol{r}'_\perp=\,\delta\boldsymbol{r}_\perp. \tag{42}$$

داریم

$$\delta Q=\lambda\,|\delta s|, \tag{43}$$

$$\delta Q'=\lambda'\,|\delta s'|, \tag{44}$$

که λ و λ' چگالی یِ طولی یِ بار در مدارها یِ به ترتیب نخیزیده و خیزیده اند. از (35) و (40) نتیجه میشود

$$\delta t=-c^{-2}\,\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\delta s. \tag{45}$$

به این ترتیب،

$$\delta Q' = \delta Q + c^{-2}\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{v}\,I\,|\delta s|, \tag{46}$$

که نتیجه میدهد

$$\lambda' = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}\right)_{t'}\,(\lambda + c^{-2}\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{v}\,I). \tag{47}$$

شاخص ِ t' در مشتقگیری به معنی یِ آن است که این مشتقگیری در t' ِ ثابت انجام شده. از (41) و (42) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}\right)_{t'} &= \frac{1}{\sqrt{1-(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})^2+[\gamma(\boldsymbol{v})]^{-2}\,(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})^2}},\\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta+[\gamma(\boldsymbol{v})]^{-2}\,\cos^2\theta}},\end{aligned} \tag{48}$$

که

$$\cos\theta := \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}. \tag{49}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\lambda' &= \frac{1}{\sqrt{1-(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})^2+[\gamma(\boldsymbol{v})]^{-2}\,(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})^2}}\,(\lambda + c^{-2}\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{v}\,I),\\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta+[\gamma(\boldsymbol{v})]^{-2}\,\cos^2\theta}}\,[\lambda + c^{-2}\,(v\,\cos\theta)\,I].\end{aligned} \tag{50}$$

4 نیرو یِ الکترُمُتُری

نیرو یِ الکترُمُتُری را با $\mathcal{E}$ نشان میدهیم. داریم

$$\mathcal{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + [\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})]\times[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})]\}, \tag{51}$$

که $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ سرعت ِ نقطه یِ $\boldsymbol{r}$ از مدار است. یک مدار ِ ساکن را در نظر بگیرید که پارامترها یِ آن را با کمیتها یِ بدون ِ پریم نشان میدهیم. این مدار را با سرعت ِ $\boldsymbol{v}$ میخیزانیم. پارامترها یِ مدار ِ خیزیده را با کمیتها یِ پریمدار نشان میدهیم. از (10)، (11)، و (13) نتیجه میشود

$$(\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}')_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel}, \tag{52}$$

$$(\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}')_{\perp} = [\gamma(\boldsymbol{v})]^{-1}\,\boldsymbol{E}_{\perp}. \tag{53}$$

از ترکیبِ اینها با (41) و (42) هم نتیجه میشود

$$\mathcal{E}' = [\gamma(\boldsymbol{v})]^{-1}\,\mathcal{E}. \tag{54}$$

5 پانوشتها

[1] Lorentz

[2] Levi-Civita

[3] John David Jackson; “classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1999) chapter 11