X1-086 (2012/08/30)

هندسه و دینامیک ِ رویه‌ها یِ نشسته در فضا

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

خمش ِ عارضی و مساحت برا یِ رویه ای که در فضا یی با یک بُعد بیشتر نشسته، و دینامیک ِ چنین رویه ای به خاطر ِ خمش ِ عارضی یِ میانگین َش بررسی میشود.

1 نشاندن

خمینه‌ها یِ $\mathbb{M}$ و $\mathbb{N}$، و نگاشت ِ هموار و یکبه‌یک ِ f با دامنه یِ $\mathbb{M}$ و مقدار در $\mathbb{N}$ را در نظر میگیریم. به $f(\mathbb{M})$ نشانده یِ $\mathbb{M}$ در $\mathbb{N}$ با f میگوییم. هر یک از نقاط ِ $x \in \mathbb{M}$ را مُضعَن با مختصات ِ شان مشخص میکنیم. به این ترتیب رابطه یِ

$$r = f(x) \tag{1}$$

را مُضعَن

$$r = f(x^1, \dots, x^m) \tag{2}$$

مینویسیم، که m بُعد ِ $\mathbb{M}$ است. میگوییم $f(\mathbb{M})$ یک رویه یِ نشسته در $\mathbb{N}$ است، اگر بُعد ِ $\mathbb{N}$ یک ی بیشتر از بُعد ِ $\mathbb{M}$ باشد. در این صورت مُضعَن میشود نقاط ِ $\mathbb{N}$ را با مختصات ِ $\mathbb{M}$ و یک مختصه یِ

اضافی پارامتری کرد:

$$r = F(x^0, x^1, \dots, x^m). \tag{3}$$

F هموار است و پارامترِ اضافی (x^0) را چنان میگیریم که

$$F(0, x^1, \dots, x^m) = f(x^1, \dots, x^m). \tag{4}$$

رابطه یِ (3) ضمنَن یک خانواده یِ یک-پارامتری از رویه‌ها در $\mathbb{N}$ را مشخص میکند. پارامترِ این خانواده x^0 است.

از این پس بُعدِ $\mathbb{N}$ را $(m+1)$ میگیریم (که یک ی بیشتر از بُعدِ $\mathbb{M}$ است)، و قرارداد میکنیم شاخصها یِ لاتین مقدارها یِ 1 تا m، و شاخصها یِ یونانی مقدارها یِ 0 تا m را میگیرند.

تعریف میکنیم

$$e_\alpha := \frac{\partial r}{\partial x^\alpha}. \tag{5}$$

دیده میشود e یک پایه برا یِ فضا یِ مماس بر $\mathbb{N}$ است. به علاوه در هر نقطه e_i ها بر رویه یِ گذرنده از آن نقطه مماس اند.

$\mathbb{N}$ را مجهز به یک متریک (حاصلِضربِ درونی) میگیریم، که اقلیدسی است. این متریک را با g نشان میدهیم:

$$u \cdot v := g(u, v). \tag{6}$$

از جمله،

$$\begin{aligned} e_\alpha \cdot e_\beta &= g(e_\alpha, e_\beta), \\ &=: g_{\alpha\,\beta}. \end{aligned} \tag{7}$$

تعریف میکنیم

$$g_{\beta\,\gamma}\, g^{\alpha\,\gamma} := \delta^\alpha_\beta. \tag{8}$$

رُشن است که g با شاخصها یِ بالا هم متقارن است. تعریف میکنیم

$$e^\alpha := g^{\beta\,\alpha}\, e_\beta. \tag{9}$$

دیده میشود

$$e^\alpha \cdot e_\beta = \delta^\alpha_\beta. \tag{10}$$

$\mathbb{N}$ را سمتدار هم میگیریم. تانسرِحجم ِ مثبت و سازگاربامتریک ِ $\mathbb{N}$ را با ε نشان میدهیم. فرض میکنیم رویه‌ها هم سمتپذیر اند. میدان ِ برداری یِ هموار ِ n را چنان تعریف میکنیم که بر رویه یِ گذرنده از آن نقطه عمود باشد، یکه باشد، و کنج ِ $(n, e_1, \dots, e_m)$ راستگرد باشد. اینها یعنی

$$n \cdot e_i = 0, \tag{11}$$

$$n \cdot n = 1, \tag{12}$$

$$\varepsilon(n, e_1, \dots, e_m) > 0. \tag{13}$$

به این ترتیب از ε یک تانسر ِ مساحت بر هر رویه القا میشود: اگر u_1 تا u_m بردارها یِ مماس بر یک رویه در یک نقطه باشند، مساحت ِ جبری یِ (حجم ِ جبری یِ m بُعدی یِ) متوازی‌السطوح ِ حاصل از آنها $\varepsilon(n, u_1, \dots, u_m)$ است. تعریف میکنیم

$$\zeta := \varepsilon(n, e_1, \dots, e_m). \tag{14}$$

انتگرال ِ ζ بر هر رویه حجم بر آن رویه را میدهد.

$\mathbb{N}$ یک هموستار ِ لِوی-چیویتا [1] (بدون ِ پیچش، و سازگار با متریک) دارد. مشتق ِ هموردا را با این هموستار (Γ) تعریف میکنیم. مشتق ِ هموردا را با ∂ نشان میدهیم. مطالب ی در این باره را میشود در مثلَن [2] یافت.

2 خمش ِ عارضی

چون n یکه است، مشتق ِ هموردا یَش بر خُد َش عمود است. به این ترتیب، در هر یک نقطه یک عملگر ِ خطی (K) از فضا یِ مماس بر رویه در آن نقطه به هم ان فضا هست، چنان که اگر u بر رویه مماس باشد

$$\partial_u n = K\, u, \tag{15}$$

یا بر حسب ِ پایه،

$$\partial_i n = K^j{}_i\, e_j. \tag{16}$$

n بر e_i ها عمود است. از اینجا،

$$\begin{aligned} e_j \cdot (\partial_i n) &= -(\partial_i e_j) \cdot n, \\ &= -\Gamma^{\alpha}{}_{i\,j}\, e_\alpha \cdot n, \end{aligned} \tag{17}$$

که نشان میدهد

$$e_j \cdot (K^k{}_i\, e_k) = e_i \cdot (K^k{}_j\, e_k). \tag{18}$$

با تعریف ِ

$$K_{i\,j} := g_{i\,k}\, K^k{}_j, \tag{19}$$

رابطه یِ (18) میشود

$$K_{j\,i} = K_{i\,j}. \tag{20}$$

میگوییم K متقارن است. به K خمش ِ عارضی یِ رویه میگوییم. به $\mathrm{tr}(K)$ (رد ِ K) خمش ِ عارضی یِ میانگین ِ رویه میگوییم. توجه کنید که برا یِ تعریف ِ (و محاسبه یِ) K یک دسته رویه لازم نیست. یک رویه کافی است.

3 انتخاب ِ مختصات

مختصات ِ x^α را میشود مُضعَن چنان گرفت که e_0 بر رویه‌ها عمود باشد. برا یِ این کار مختصات ِ پریمدار ِ $(x'^0, \dots, x'^m)$ را در نظر میگیریم، که بر هر یک از رویه‌ها x'^0 ثابت است، ولی e'_0 لزومَن بر رویه‌ها عمود نیست. $(x^0, \dots, x^m)$ را یک دسته مختصه یِ دیگر میگیریم، که

$$x^0 = x'^0. \tag{21}$$

. داریم

$$\begin{aligned} e_0 &= \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^0}\right)_x e'_\alpha, \\ &= e'_0 + \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^0}\right)_x e'_i. \end{aligned} \tag{22}$$

میخاهیم e_0 با n متناسب باشد، که

$$n = n^{\alpha'}\, e'_{\alpha}. \tag{23}$$

این یعنی

$$\left(\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^0}\right)_x = \frac{n^{i'}}{n^{0'}}. \tag{24}$$

این دستگاه، با شرطِ اولیه یِ مثلَن

$$x^{i'}(x^0 = 0) = x^i, \tag{25}$$

مُضعَن بسته‌گی یِ مختصاتِ پریمدار به مختصاتِ بدونِ پریم را میدهد، و میشود مُضعَن این بسته‌گی را وارون کرد. از این پس فرض میکنیم مختصاتِ بدونِ پریم چنین انتخاب شده اند (که x^0 بر هر رویه ثابت است، و e_0 بر هر رویه عمود است). به این ترتیب، یک نگاشتِ اسکالرِ Υ هست که

$$e_0 = \Upsilon\, n. \tag{26}$$

همچنین،

$$g_{0\,i} = 0. \tag{27}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} g^{0\,0} &= (g_{0\,0})^{-1}, \\ &= (\Upsilon)^{-2} \end{aligned} \tag{28}$$

$$g^{0\,i} = 0, \tag{29}$$

$$g_{j\,k}\, g^{i\,k} = \delta^i_j. \tag{30}$$

4 دینامیکِ مساحت

داریم

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \zeta &= \partial_\alpha[\varepsilon(n, e_1, \dots, e_m)],\\ &= (\partial_\alpha \varepsilon)(n, e_1, \cdots, e_m) + \varepsilon(\partial_\alpha n, e_1, \dots, e_m)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon(n, e_1, \cdots, e_{i-1}, \partial_\alpha e_i, e_{i+1}, \dots, e_m). \end{aligned} \tag{31}$$

چون هموستار لِوی-چیویتا [1] و تانسرِ حجم سازگار با متریک است، مشتقِ تانسرِ حجم صفر است:

$$\partial \varepsilon = 0. \tag{32}$$

چون هموستار با متریک سازگار است، و طولِ n ثابت است، مشتقِ n بر n عمود است:

$$n \cdot (\partial_\alpha n) = 0. \tag{33}$$

به این ترتیب یک تانسرِ $\tilde{K}$ هست که

$$\partial_\alpha n = \tilde{K}^i{}_\alpha\, e_i. \tag{34}$$

از این، و پادتقارنِ تانسرِ حجم، نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\varepsilon(\partial_\alpha n, e_1, \dots, e_m) &= \tilde{K}^i{}_\alpha\, \varepsilon(e_i, e_1, \dots, e_m),\\ &= 0. \end{aligned} \tag{35}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathrm{LH} &= \varepsilon(n, e_1, \dots, e_{i-1}, \partial_\alpha e_i, e_{i+1}, \dots, e_m),\\ &= \Gamma^\beta{}_{\alpha\, i}\, \varepsilon(n, e_1, \dots, e_{i-1}, e_\beta, e_{i+1}, \dots, e_m). \end{aligned} \tag{36}$$

از پادتقارنِ تانسرِ حجم و تناسبِ e_0 با n معلوم میشود همه یِ جمله‌ها یِ طرفِ راست جز جمله یِ $\beta = i$ صفر اند. به این ترتیب،

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon(n, e_1, \dots, e_{i-1}, \partial_\alpha e_i, e_{i+1}, \dots, e_m) = \Gamma^i{}_{\alpha\, i}\, \varepsilon(n, e_1, \dots, e_m). \tag{37}$$

از اینجا،

$$\partial_\alpha \zeta = \Gamma^i{}_{\alpha\, i}\, \zeta. \tag{38}$$

داریم

$$\begin{aligned}\Gamma^0{}_{i\,0}\, e_0 + \Gamma^j{}_{i\,0}\, e_j &= \partial_i e_0,\\ &= \partial_i(\Upsilon\, n),\\ &= (\partial_i \Upsilon)\, n + \Upsilon\, \partial_i n,\\ &= \frac{1}{\Upsilon}\, (\partial_i \Upsilon)\, e_0 + \Upsilon\, K^j{}_i\, e_j. \end{aligned} \tag{39}$$

پس،

$$\Gamma^j{}_{i\,0} = \Upsilon\, K^j{}_i. \tag{40}$$

از این، و این که هموستار بدونِپیچش است، نتیجه میشود

$$\Gamma^j{}_{0\,i} = \Upsilon\, K^j{}_i. \tag{41}$$

به این ترتیب،

$$\partial_0 \zeta = \Upsilon\, [\mathrm{tr}(K)]\, \zeta. \tag{42}$$

5 دینامیک ِ خمش ِ عارضی

از (16) و (19) و (30) دیده میشود

$$K^j{}_i = e^j \cdot (\partial_i n). \tag{43}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\partial_0 K^j{}_i &= (\partial_0 e^j) \cdot (\partial_i n) + e^j \cdot (\partial_0 \partial_i n),\\ &= (\partial_0 e^j) \cdot (\partial_i n) + e^j \cdot (\partial_i \partial_0 n) + R^j{}_{\alpha\, 0\, i}\, n^\alpha, \end{aligned} \tag{44}$$

که R تانسرِ ریمان [3] است. داریم

$$\partial_0 e^j = -\Gamma^j{}_{0\,\alpha}\, e^\alpha,$$
$$= -\Upsilon\, K^j{}_k\, e^k - \Gamma^j{}_{0\,0}\, e^0, \qquad (45)$$

که نتیجه میدهد

$$(\partial_0 e^j)\cdot(\partial_i n) = -\Upsilon\, K^j{}_k\, K^k{}_i. \qquad (46)$$

همچنین،

$$e_k\cdot(\partial_0 n) = -(\partial_0 e_k)\cdot n,$$
$$= -\Upsilon\,\Gamma^0{}_{0\,k},$$
$$= -\Upsilon\,\left[\frac{1}{2}\, g^{0\,0}\,(\partial_k g_{0\,0})\right],$$
$$= -\partial_k\Upsilon, \qquad (47)$$

که با استفاده از (34) نتیجه میدهد

$$\partial_0 n = -g^{k\,l}\,(\partial_k\Upsilon)\, e_l. \qquad (48)$$

از اینجا،

$$e^j\cdot(\partial_i\partial_0 n) = -e^j\cdot\{\partial_i[g^{k\,l}\,(\partial_k\Upsilon)\, e_l]\},$$
$$= -\partial_i(g^{k\,j}\,\partial_k\Upsilon) - \Gamma^j{}_{i\,l}\, g^{k\,l}\,\partial_k\Upsilon. \qquad (49)$$

سرانجام،

$$R^j{}_{\alpha\,0\,i}\, n^\alpha = \Upsilon\, R^j{}_{\alpha\,\beta\,i}\, n^\alpha\, n^\beta. \qquad (50)$$

به این ترتیب،

$$\partial_0 K^j{}_i = -\Upsilon\, K^j{}_k\, K^k{}_i - \partial_i(g^{k\,j}\,\partial_k\Upsilon) - \Gamma^j{}_{i\,l}\, g^{k\,l}\,\partial_k\Upsilon + \Upsilon\, R^j{}_{\alpha\,\beta\,i}\, n^\alpha\, n^\beta. \qquad (51)$$

از (38) و با استفاده از این که هموستار بدونِ‌پیچش است، نتیجه میشود

$$\Gamma^i{}_{i\,l} = (\zeta)^{-1}\,\partial_l\zeta. \qquad (52)$$

از این و (51) نتیجه می‌شود

$$\partial_0 K^i{}_i = -\Upsilon\, K^i{}_k\, K^k{}_i - (\zeta)^{-1}\,\partial_i(\zeta\, g^{k\,i}\,\partial_k\Upsilon) + \Upsilon\, R^i{}_{\alpha\,\beta\,i}\, n^\alpha\, n^\beta, \qquad (53)$$

که با استفاده از این که R نسبت به شاخص‌ها یِ سه‌وم و چهارم َش پادمتقارن است، و این که مئلفه‌ها یِ ناصفر ِ n صفر است، می‌شود

$$\partial_0[\mathrm{tr}(K)] = -\Upsilon\,\mathrm{tr}(K\,K) - (\zeta)^{-1}\,\partial_i(\zeta\, g^{k\,i}\,\partial_k\Upsilon) + \Upsilon\, R^\gamma{}_{\alpha\,\beta\,\gamma}\, n^\alpha\, n^\beta. \qquad (54)$$

این عبارت دیگر به انتخاب ِ مختصات (این که n با e_0 موازی باشد) بسته‌گی ندارد.

6 نگاشت‌ها یِ مُضعی از رویه که تابع ِ خمش ِ میانگین اند

نگاشت ِ H را در نظر بگیرید، که به رویه یِ $\mathbb{S}$ مقدار ِ $H(\mathbb{S})$ را نسبت می‌دهد. می‌گوییم H مُضعی (فزونوَر) است، اگر یک نگاشت ِ $\mathcal{H}$ از رویه و تعداد ِ باپایان ی از مشتقات ِ آن در r باشد که H انتگرال ِ $\mathcal{H}$ بر رویه باشد:

$$H(\mathbb{S}) = \int_{\mathbb{S}} \mathrm{d}S\;\mathcal{H}(r), \qquad (55)$$

که $\mathrm{d}S$ عنصر ِ مساحت برا یِ رویه است. رویه را با نگاشت ِ f مثل ِ (1) مشخص می‌کنیم. (55) می‌شود

$$H(\mathbb{S}) = \int_{\mathbb{M}} \mathrm{d}^m x\;\zeta(x)\,\mathcal{H}[f(x)]. \qquad (56)$$

می‌گوییم H مُضعی و تابع ِ فقط خمش ِ میانگین است، اگر $\mathcal{H}(r)$ تابع ی از خمش ِ میانگین در r باشد. یعنی اگر یک تابع ِ h باشد که

$$\mathcal{H}(r) = h\{[\mathrm{tr}(K)](r)\}. \qquad (57)$$

دُ رویه یِ نزدیک به هم ($\mathbb{S}$ و $\tilde{\mathbb{S}}$) را در نظر بگیرید که با نگاشت‌ها یِ، به ترتیب، f و $\tilde{f}$ مشخص می‌شوند، چنان که

$$\tilde{f}^\alpha - f^\alpha = \delta f^\alpha. \qquad (58)$$

تعریف می‌کنیم

$$\delta H =: \int_{\mathbb{M}} \mathrm{d}^m x\;\zeta(x)\,\frac{\delta H}{\delta f^\alpha(x)}\,\delta f^\alpha(x) + o(\delta f). \qquad (59)$$

جابه‌جایی یِ رویه در راستاها یِ مماس بر رویه، شکل ِ رویه را تغییر نمی‌دهد. برا یِ جابه‌جاییها یِ عمود بر رویه،

$$\delta f^\alpha = \Upsilon\, n^\alpha\, x^0, \tag{60}$$

که (4) برقرار است و

$$F(x^0, x^1, \dots, x^m) = \tilde f(x^1, \dots, x^m). \tag{61}$$

از اینجا نتیجه می‌شود

$$\int_{\mathbb{M}} \mathrm{d}^m x\, \zeta\, \frac{\delta H}{\delta f^\alpha}\, n^\alpha\, \Upsilon = \frac{\mathrm{d}\{H[\mathbb{S}(x^0)]\}}{\mathrm{d}x^0}\Big|_{x^0=0}. \tag{62}$$

H مُضعی و تابع ِ فقط خمش ِ میانگین می‌گیریم، چنان که (57) برقرار است. با استفاده از (42) و (54)، دیده می‌شود

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\{H[\mathbb{S}(x^0)]\}}{\mathrm{d}x^0}\Big|_{x^0=0} = &\int_{\mathbb{M}} \mathrm{d}^m x\, \zeta\, \Big(\Upsilon\, [\mathrm{tr}(K)]\, \{h[\mathrm{tr}(K)]\}\\
&- \{h'[\mathrm{tr}(K)]\}\, [\Upsilon\, \mathrm{tr}(K\,K) + (\zeta)^{-1}\, \partial_i(\zeta\, g^{k\,i}\, \partial_k \Upsilon)\\
&- \Upsilon\, R^\gamma{}_{\alpha\,\beta\,\gamma}\, n^\alpha\, n^\beta]\Big),\\
= &\int_{\mathbb{M}} \mathrm{d}^m x\, \zeta\, \Upsilon\, \Big[[\mathrm{tr}(K)]\, \{h[\mathrm{tr}(K)]\}\\
&- [\mathrm{tr}(K\,K)]\, \{h'[\mathrm{tr}(K)]\} - (\zeta)^{-1}\, \partial_k\Big(\zeta\, g^{k\,i}\, \partial_i\{h'[\mathrm{tr}(K)]\}\Big)\\
&- \Upsilon\, R^\gamma{}_{\alpha\,\beta\,\gamma}\, n^\alpha\, n^\beta\, \{h'[\mathrm{tr}(K)]\}\Big],
\end{aligned} \tag{63}$$

که در تبدیل ِ جمله یِ سه‌وم انتگرالگیری یِ جزئ-به-جزئ به کار رفته. با تعریف ِ لَپلَسی ($\triangle$) با

$$\triangle X := (\zeta)^{-1}\, \partial_k(\zeta\, g^{k\,i}\, \partial_i X), \tag{64}$$

از (62) و (63) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
\frac{\delta H}{\delta f^\alpha}\, n^\alpha = &[\mathrm{tr}(K)]\, \{h[\mathrm{tr}(K)]\} - [\mathrm{tr}(K\,K)]\, \{h'[\mathrm{tr}(K)]\} - \Delta\{h'[\mathrm{tr}(K)]\}\\
&- \Upsilon\, R^\gamma{}_{\alpha\,\beta\,\gamma}\, n^\alpha\, n^\beta\, \{h'[\mathrm{tr}(K)]\}.
\end{aligned} \tag{65}$$

از جمله اگر فضا تخت باشد،

$$\frac{\delta H}{\delta f^\alpha}\, n^\alpha = [\mathrm{tr}(K)]\, \{h[\mathrm{tr}(K)]\} - [\mathrm{tr}(K\,K)]\, \{h'[\mathrm{tr}(K)]\} - \Delta\{h'[\mathrm{tr}(K)]\}. \tag{66}$$

7 دینامیکِ رویه

یک رویه در $\mathbb{N}$ را در نظر بگیرید، که با نگاشتِ f مثلِ (1) مشخص میشود، و دینامیکَش به این شکل با یک نگاشتِ H از رویه داده میشود.

$$n\cdot\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta f^{\alpha}}\,n^{\alpha}. \tag{67}$$

از جمله اگر H مُضعی و تابع ً فقط خمشِ میانگین باشد، چنان که (57) برقرار باشد،

$$n\cdot\frac{\partial f}{\partial t}=-[\mathrm{tr}(K)]\,\{h[\mathrm{tr}(K)]\}+[\mathrm{tr}(K\,K)]\,\{h'[\mathrm{tr}(K)]\}+\Delta\{h'[\mathrm{tr}(K)]\}. \tag{68}$$

8 پانوشتها

[1] Levi-Civita

[2] Mikio Nakahara; “Geometry, topology, and physics” 2nd edition (Institute of Physics Publishing, 2003)

[3] Riemann