X1-088 (2012/11/29)

تقارنها یِ فضازمانِ نانسبیتی، به عنوانِ انقباضِ تقارنها یِ فضازمانِ نسبیتی

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

جبرِ تقارنها یِ فضازمانِ نسبیتی بررسی، و با استفاده از آن جبرِ تقارنها یِ فضازمانِ نانسبیتی ساخته میشود.

1 تقارنها یِ فضازمانِ نسبیتی

تقارنها یِ فضازمانِ نسبیتی نگاشتها یی اند که متریکِ فضازمان را تغییر نمیدهند. در فضازمانِ مینکُفسکی [1]،

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\,\mathrm{d}t^2 + \delta_{i\,j}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j,$$

$$=: \eta_{\mu\,\nu}\,\mathrm{d}r^\mu\,\mathrm{d}r^\nu. \tag{1}$$

t زمان، r^i مختصه یِ (دکَرتی یِ) i اُمِ مکان، و s طول (ِ فضازمانی) است. شاخصها یِ لاتین مقدارها یِ 1 تا n (بعدِ فضا)، و شاخصها یِ یونانی مقدارها یِ 0 تا n را میپذیرند. r^0 زمان است:

$$r^0 := t. \tag{2}$$

به تانسر ِ متقارن ِ η متریک ِ مینکُفسکی [1] میگویند.

نگاشت ِ

$$r' = f(r) \tag{3}$$

را در نظر بگیرید، که f وارون‌پذیر است و خُد َش و وارون َش هموار اند. میگوییم f یک تقارن ِ فضازمان است اگر

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2, \tag{4}$$

یعنی

$$\eta_{\mu\,\nu}\,\mathrm{d}r'^\mu\,\mathrm{d}r'^\nu = \eta_{\alpha,\beta}\,\mathrm{d}r^\alpha\,\mathrm{d}r^\beta, \tag{5}$$

که هم‌ارز است با

$$\eta_{\mu\,\nu}\,\frac{\partial r'^\mu}{\partial r^\alpha}\,\frac{\partial r'^\nu}{\partial r^\beta} = \eta_{\alpha,\beta}. \tag{6}$$

از این معادله نسبت به r^γ مشتق میگیریم. با استفاده از این که η ثابت است، نتیجه میشود

$$\eta_{\mu\,\nu}\,\left(\frac{\partial^2 r'^\mu}{\partial r^\gamma\,\partial r^\alpha}\,\frac{\partial r'^\nu}{\partial r^\beta} + \frac{\partial r'^\mu}{\partial r^\alpha}\,\frac{\partial^2 r'^\nu}{\partial r^\gamma\,\partial r^\beta}\right) = 0. \tag{7}$$

با استفاده از این که η متقارن است، نتیجه میشود

$$\eta_{\mu\,\nu}\,\left(\frac{\partial^2 r'^\mu}{\partial r^\gamma\,\partial r^\alpha}\,\frac{\partial r'^\nu}{\partial r^\beta} + \frac{\partial^2 r'^\mu}{\partial r^\gamma\,\partial r^\beta}\,\frac{\partial r'^\nu}{\partial r^\alpha}\right) = 0. \tag{8}$$

در این معادله (α,β,γ) را به (β,γ,α) و بعد به (γ,α,β) تبدیل میکنیم. دُ معادله یِ دیگر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\eta_{\mu\,\nu}\,\left(\frac{\partial^2 r'^\mu}{\partial r^\alpha\,\partial r^\beta}\,\frac{\partial r'^\nu}{\partial r^\gamma} + \frac{\partial^2 r'^\mu}{\partial r^\alpha\,\partial r^\gamma}\,\frac{\partial r'^\nu}{\partial r^\beta}\right) = 0,\\
&\eta_{\mu\,\nu}\,\left(\frac{\partial^2 r'^\mu}{\partial r^\beta\,\partial r^\gamma}\,\frac{\partial r'^\nu}{\partial r^\alpha} + \frac{\partial^2 r'^\mu}{\partial r^\beta\,\partial r^\alpha}\,\frac{\partial r'^\nu}{\partial r^\gamma}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

(8) را از مجموع ِ این دُ معادله کم میکنیم. با استفاده از این که مشتق ِ دوم ِ r' نسبت به شاخص‌ها یِ مشتق‌گیری متقارن است، نتیجه میشود

$$\eta_{\mu\,\nu}\,\frac{\partial^2 r'^\mu}{\partial r^\alpha\,\partial r^\beta}\,\frac{\partial r'^\nu}{\partial r^\gamma} = 0. \tag{10}$$

از این که مشتق ِ f وارون‌پذیر است نتیجه میشود

$$\eta_{\mu\,\nu}\,\frac{\partial^2 r'^\mu}{\partial r^\alpha\,\partial r^\beta} = 0. \tag{11}$$

از این که η وارونپذیر است نتیجه میشود

$$\frac{\partial^2 r'^{\mu}}{\partial r^{\alpha}\,\partial r^{\beta}} = 0. \tag{12}$$

این یعنی f دستِبالا خطی است. یعنی یک ماتریس ِ ثابت (Λ) و یک بردار ِ ثابت (a) هستند که

$$f(r) = \Lambda\, r + a. \tag{13}$$

البته (13) تضمین نمیکند (4) یا (6) برقرار اند. (13) تضمین میکند (7) برقرار است، که مشتق ِ (6) است. (13) را در (6) میگذاریم. نتیجه میشود

$$\eta_{\mu\,\nu}\,\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\,\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha,\beta}, \tag{14}$$

یا

$$\Lambda^{\mathrm{t}}\,\Lambda = \mathbf{1}, \tag{15}$$

که X^{t} (ترانهاده یِ X) با η تعریف میشود:

$$\eta_{\alpha\,\sigma}\,(X^{\mathrm{t}})^{\sigma}{}_{\nu} := \eta_{\mu\,\nu}\,X^{\mu}{}_{\alpha}. \tag{16}$$

به ماتریس ی که وارون ِ ترانهاده اَش است، یک ماتریس ِ متعامد میگویند. این یعنی Λ متعامد است. به این ترتیب جواب ِ (4) یا همارز با آن (6) به شکل ِ (13) است، که در آن بردار ِ ثابت ِ a دلبخاه است، اما ماتریس ِ ثابت ِ Λ متعامد است، یعنی رابطه یِ (14) یا همارز با آن (15) را برمیآورَد.

جبر ِ تقارنها یِ فضازمان را بررسی کنیم. برا یِ این کار Λ را نزدیک ِ $\mathbf{1}$ میگیریم:

$$\Lambda = \mathbf{1} + \Theta + o(\Theta), \tag{17}$$

که Θ یک ماتریس ِ کوچک است. (15) میشود

$$\Theta^{\mathrm{t}} + \Theta = 0. \tag{18}$$

به ماتریس ی که قرینه یِ ترانهاده اَش است، یک ماتریس ِ پادمتقارن میگویند. Θ پادمتقارن است. مفصل ِ (18) میشود

$$\eta_{\mu\,\beta}\,\Theta^{\mu}{}_{\alpha} + \eta_{\alpha\,\sigma}\,\Theta^{\sigma}{}_{\beta} = 0, \tag{19}$$

یا

$$\Theta_{\beta\,\alpha} + \Theta_{\alpha\,\beta} = 0, \tag{20}$$

که شاخصها با η پایینُبالا میروند:

$$X\cdots{}_{\alpha}\cdots = \eta_{\alpha\,\beta}\,X\cdots{}^{\beta}\cdots\,, \tag{21}$$

$$X\cdots{}^{\alpha}\cdots = \eta^{\beta\,\alpha}\,X\cdots{}_{\beta}\cdots\,. \tag{22}$$

از جمله،

$$\eta^{\beta\,\alpha} = (\eta^{-1})^{\alpha\,\beta}. \tag{23}$$

اینها را میشود در مثلَن [2] یافت.

داریم

$$\begin{aligned}\Theta_{\alpha\,\beta} &= \Theta^{\mu\,\nu}\,\eta_{\alpha\,\mu}\,\eta_{\beta\,\nu},\\ &= \frac{1}{2}\,\Theta^{\mu\,\nu}\,(\eta_{\alpha\,\mu}\,\eta_{\beta\,\nu} - \eta_{\alpha\,\nu}\,\eta_{\beta\,\mu}),\end{aligned} \tag{24}$$

که در برابری یِ آخر پادتقارن ِ Θ به کار رفته. با تعریف ِ

$$(M_{\mu\,\nu})_{\alpha\,\beta} := \eta_{\mu\,\beta}\,\eta_{\nu\,\alpha} - \eta_{\alpha\,\mu}\,\eta_{\beta\,\nu}, \tag{25}$$

دیده میشود

$$\Theta = \frac{1}{2}\Theta^{\mu\,\nu}\,M_{\nu\,\mu}. \tag{26}$$

متناظر با ماتریس ِ ثابت ِ Λ که (15) را بر میآورَد، و بردار ِ ثابت ِ a، نگاشت ِ $f(\Lambda, a)$ را مثل ِ (13) تعریف میکنیم:

$$[f(\Lambda, a)](r) := \Lambda\,r + a. \tag{27}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\{[f(\Lambda,0)]\circ[f(\Lambda',0)] - [f(\Lambda',0)]\circ[f(\Lambda,0)]\}(r) &= [\Lambda,\Lambda']\,r,\\ \{[f(\Lambda,0)]\circ[f(\mathbf{1},a)] - [f(\mathbf{1},a)]\circ[f(\Lambda,0)]\}(r) &= (\Lambda-\mathbf{1})\,a,\\ \{[f(\mathbf{1},a)]\circ[f(\mathbf{1},a')] - [f(\mathbf{1},a)]\circ[f(\mathbf{1},a')]\}(r) &= 0.\end{aligned} \tag{28}$$

رُشن است که

$$[f(\Lambda, a)](r) = r + \frac{1}{2}\Theta^{\mu\,\nu}\,M_{\nu\,\mu}\,r + a + o(\Theta, a), \tag{29}$$

که رابطه یِ Λ با Θ مثلِ (17) است. P_μ (مولدِ انتقال در جهتِ μ)، و $J_{\mu\,\nu}$ (مولدِ تبدیلِ لُرِنتس [3] در صفحه یِ شاملِ جهتها یِ μ و ν) را با

$$[f(\Lambda, a)](r) =: r + \frac{1}{2}\Theta^{\mu\,\nu}\, J_{\nu\,\mu}(r) + a^\mu\, P_\mu(r) + o(\Theta, a) \tag{30}$$

تعریف میکنیم. با استفاده از (25) و (28) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
[J_{\mu\,\nu}, J_{\rho\,\sigma}] &= (M_{\mu\,\nu})^\alpha{}_\rho\, J_{\alpha\,\sigma} + (M_{\mu\,\nu})^\alpha{}_\sigma\, J_{\rho,\alpha},\\
&= \eta_{\mu\,\rho}\, J_{\nu\,\sigma} - \eta_{\nu\,\rho}\, J_{\mu\,\sigma} + \eta_{\mu\,\sigma}\, J_{\rho\,\nu} - \eta_{\nu\,\sigma}\, J_{\rho\,\mu}, \qquad (31)\\
[J_{\mu\,\nu}, P_\rho] &= (M_{\mu\,\nu})^\alpha{}_\rho\, P_\alpha,\\
&= \eta_{\mu\,\rho}\, P_\nu - \eta_{\nu\,\rho}\, P_\mu, \qquad (32)\\
[P_\mu, P_\nu] &= 0. \qquad (33)
\end{aligned}$$

رابطه‌ها یِ (31) تا (33) جبرِ تقارنها یِ فضازمانِ نسبیتی (یا جبرِ پوَنکَره [4]) را مشخص میکنند.

2 تقارنها یِ فضازمانِ نانسبیتی

فضازمانِ نانسبیتی را میشود حدِ فضازمانِ نسبیتی در $c \to \infty$ گرفت. برا یِ اعمالِ این حد، بخشها یِ فضایی و زمانی را از هم جدا میکنیم. داریم

$$\eta_{\mu\,\nu} = \begin{cases} -c^2, & \mu = \nu = 0\\ 1, & \mu = \nu \neq 0\\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \cdot \tag{34}$$

از اینجا با استفاده از (25) دیده میشود

$$(M_{i\,0})^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_0\, \delta_{i\,\beta} + c^2\, \delta^\alpha_i\, \delta^0_\beta. \tag{35}$$

این نشان میدهد $M_{i\,0}$ در $c \to \infty$ حد ندارد. تعریف میکنیم

$$N_i := \lim_{c\to\infty} (c^{-2}\, M_{i\,0}), \tag{36}$$

که نشان میدهد

$$(N_{i\,0})^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_i\, \delta^0_\beta. \tag{37}$$

برا یِ این که (26) در $c\to\infty$ حد داشته باشد، تعریف می‌کنیم

$$\alpha^i := \lim_{c\to\infty}(c^2\,\Theta^{0\,i}). \tag{38}$$

با این تعریف ِ $\Theta^{0\,i}$، معلوم می‌شود برا یِ این (30) در $c\to\infty$ حد داشته باشد باید $J_{i\,0}$ را بازتعریف کنیم:

$$K_i := \lim_{c\to\infty}(c^{-2}\,J_{i\,0}). \tag{39}$$

بخش‌ها یِ فضایی و زمانی یِ (31) را از هم جدا می‌کنیم:

$$[J_{i\,j}, J_{k\,l}] = \delta_{i\,k}\,J_{j\,l} - \delta_{j\,k}\,J_{i\,l} + \delta_{i\,l}\,J_{k\,j} - \delta_{j\,l}\,J_{k\,i}, \tag{40}$$

$$[J_{i\,j}, J_{k\,0}] = \delta_{i\,k}\,J_{j\,0} - \delta_{j\,k}\,J_{i\,0}, \tag{41}$$

$$[J_{i\,0}, J_{j\,0}] = -c^2\,J_{i\,j}. \tag{42}$$

رابطه‌ها یِ (41) و (42) در $c\to\infty$ (و بر حسب ِ K_i به جا یِ $J_{i\,0}$) می‌شوند

$$[J_{i\,j}, K_k] = \delta_{i\,k}\,K_j - \delta_{j\,k}\,K_i, \tag{43}$$

$$[K_i, K_j] = 0. \tag{44}$$

رابطه‌ها یِ (40) و (43) و (44) جبر ِ بخش ِ همگن ِ تقارن‌ها یِ فضازمان ِ نانسبیتی را مشخص می‌کنند.

برا یِ بخش ِ ناهمگن ِ تقارن‌ها یِ فضازمان ِ نانسبیتی، توجه می‌کنیم که رابطه یِ (33) تغییر نمی‌کند. در (32) بخش‌ها یِ فضایی و زمانی را از هم جدا می‌کنیم و (36) و (37) و (39) را به کار می‌بریم. نتیجه می‌شود

$$[J_{i\,j}, P_k] = \delta_{i\,k}\,P_j - \delta_{j\,k}\,P_i, \tag{45}$$

$$[J_{i\,j}, P_0] = 0, \tag{46}$$

$$[K_i, P_j] = 0, \tag{47}$$

$$[K_i, P_0] = P_i. \tag{48}$$

جبر ِ تقارن‌ها یِ نانسبیتی با اعمال ِ یک نگاشت ِ تکین، (39)، بر جبر ِ تقارن‌ها یِ نسبیتی به دست آمد. به این عمل انقباض می‌گویند.

رابطه یِ (47) به این معنی است که انتقال ِ فضایی با خیز ِ گالیلیِٔ [5] جابه‌جا میشود، که واقعَن هم چنین است. اما اگر به $\overline{P_i}$ (که

$$\overline{X} := \mathrm{i}\,\hbar\, X, \tag{49}$$

و P_i مولد ِ انتقال در جهت ِ i است) مثل ِ مثلفه یِ i ِ تکانه یِ خطی نگاه کنیم، از (47) چنین بر می‌آید که خیز ِ گالیلیِٔ مقدار ِ تکانه یِ خطی را عوض نمیکند. این عجیب مینماید: خیر ِ گالیلیِٔ [5] در جهت ِ i، مثلفه یِ i ِ سرعت را عوض میکند و لابد باید مثلفه یِ i ِ تکانه یِ خطی را هم عوض کند. این مشکل حل میشود اگر به رابطه یِ انرژیها یِ نسبیتی و نانسبیتی توجه کنیم. $\overline{E}$ (انرژی یِ نانسبیتی) را بر حسب ِ $\overline{P_0}$ چنین تعریف میکنیم.

$$E := \lim_{c\to\infty}(-P_0 - m\,c^2). \tag{50}$$

این یعنی فرق ِ انرژی یِ نانسبیتی با $(-\overline{P_0})$ (انرژی یِ نسبیتی) در یک ثابت (انرژی یِ سکون) است. به این ترتیب،

$$\lim_{c\to\infty}(c^{-2}\,P_0) = -m. \tag{51}$$

از (32) نتیجه میشود

$$[c^{-2}\,J_{i\,0}, P_j] = c^{-2}\,P_0\,\delta_{i\,j}, \tag{52}$$

که با استفاده از (39) و (51) نتیجه میدهد

$$[K_i, P_j] = -m\,\delta_{i\,j}. \tag{53}$$

$\overline{m}$ جرم ِ ذره (یِ نانسبیتی) است. از رابطه یِ بالا نتیجه میشود

$$P_j\,[\exp(v^i\,K_i)] = [\exp(v^i\,K_i)]\,(P_j + m\,v_j). \tag{54}$$

$[\exp(v^i\,K_i)]$ یک خیز ِ گالیلیِٔ [5] با سرعت ِ v است. پس یک خیز ِ گالیلیِٔ [5] با سرعت ِ v مثلفه یِ j ِ تکانه را به اندازه یِ $(\overline{m}\,v_j)$ تغییر میدهد. این هم ان است که انتظار داریم رخ دهد، اگر $\overline{m}$ جرم ِ ذره باشد: خیز ِ گالیلیِٔ [5] با سرعت ِ vسرعت ِ ذره را به اندازه یِ v تغییر میدهد، و در نتیجه تکانه یِ آن را به اندازه یِ جرم ضرب در v تغییر میدهد.

3 پانوشتها

[1] Minkowski

[2] Steven Weinberg; "Gravitation and cosmology" (John Wiley & Sons, 1972) chapter 2

[3] Lorentz

[4] Poincaré

[5] Galileo