X1-090 (2013/02/26)

حرکتِ یک گویِ کروی-متقارن بر یک صفحه

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

با استفاده از متغیرها یِ مختلط، معادلاتِ حرکتِ یک گویِ کروی-متقارن (شاملِ معادله یِ تحولِ مکانِ مرکزِجرم و معادله یِ تحولِ سرعتِ زاویه‌ای یِ گوی) بررسی میشود. به عنوانِ یک مثال، حرکتِ یک گوی بر یک میزِ افقی یِ چرخان بررسی میشود.

1 سینماتیک

گو یی به شعاعِ a را در نظر بگیرید که رو یِ یک صفحه حرکت میکند. مکانِ مرکزِ این گوی را میشود با یک بردارِ دُ-بُعدی مشخص کرد. به جا یِ این بردارِ دُ-بُعدی متغیرِ مختلطِ z را به کار میبریم. مشتقِ مکان نسبت به زمان (t) هم یک بردارِ دُ-بُعدی است که آن را هم با متغیرِ مختلطِ v نمایش میدهیم:

$$v := \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

به این ترتیب، حالت ِ انتقالی یِ این گوی با دُ متغیر ِ مختلط ِ z و v تعیین میشود. حالت ِ دورانی یِ این گوی با سه زاویه (مثلَن زاویه‌ها یِ اُیلر [[1]]) و سه مئلفه یِ سرعت ِ زاویه‌ای تعیین میشود. اگر گوی کروی-متقارن باشد، زاویه‌ها یِ مشخص-کننده یِ پیکربندی یِ دورانی یِ آن در دینامیک ِ بقیه یِ متغیرها وارد نمیشوند. از این پس فرض میکنیم گوی کروی-متقارن است. سرعت ِ زاویه‌ای یک بخش ِ موازی با صفحه و یک بخش ِ عمود بر صفحه دارد. اولی را با متغیر ِ مختلط ِ ω و دومی را با متغیر ِ حقیقی یِ $\omega_\perp$ نمایش میدهیم. در واقع هر بردار ِ سه-بُعدی را میشود به شکل ِ مشابه ی بر حسب ِ یک متغیر ِ مختلط و یک متغیر ِ حقیقی نوشت:

$$(a, a_\perp) := a + \boldsymbol{n}\, a_\perp, \tag{2}$$

که $\boldsymbol{n}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر صفحه است. این بردار را به سو یِ نیمفضا یی میگیریم که گوی در آن است، محورها یِ حقیقی و مُهومی در صفحه را چنان میگیریم، که بخش ِ مثبت ِ محور ِ مُهومی دوران-یافته یِ بخش ِ مثبت ِ محور ِ حقیقی حُل ِ $\boldsymbol{n}$ به اندازه یِ $(\pi/2)$ باشد. بخش ِ حقیقی، بخش ِ مُهومی، و مزدوج ِ مختلط ِ ξ را با به ترتیب $\mathrm{Re}(\xi)$ ، $\mathrm{Im}(\xi)$ ، و ξ^{c} نشان میدهیم. دیده میشود

$$(a, a_\perp)\cdot(b, a_\perp) = \mathrm{Re}(a^{\mathrm{c}}\, b) + a_\perp\, b_\perp, \tag{3}$$

$$(a, a_\perp)\times(b, b_\perp) = [\mathrm{i}\,(a_\perp\, b - b_\perp\, a), \mathrm{Im}(a^{\mathrm{c}}\, b)], \tag{4}$$

$$a^{\mathrm{c}}\, b = (a, 0)\cdot(b, 0) + \mathrm{i}\,\boldsymbol{n}\cdot(a, 0)\times(b, 0). \tag{5}$$

بردار ِ مکان ِ نقطه یِ تماس ِ گوی با صفحه، $(0, -R)$ است، که R شعاع ِ گوی است. سرعت ِ نقطه یِ تماس ِ گوی با صفحه هم $(u, 0)$ است. دیده میشود

$$u = v + \mathrm{i}\, R\,\omega. \tag{6}$$

2 دینامیک

نیرو یِ وارد بر گوی یک بخش ِ موازی با صفحه دارد که آن را با $(F, 0)$ نشان میدهیم. برایند ِ بخش ِ عمود-بر-صفحه یِ این نیرو صفر است، چون گو ی از صفحه جدا نمیشود. بخش ی از نیروها یِ عمود-بر-صفحه در نقطه یِ تماس ِ گوی با صفحه وارد میشود. گشتاور ِ حاصل از این بخش، نسبت به مرکز ِ گوی صفر است. با فرض ِ این که نیروها یی که به گوی وارد میشوند و ناشی از صفحه نیستند

هم به طَرِ مثر به مرکزِ گوی وارد شوند، معلوم میشود تنها-نیرو یی که نسبت به مرکزِ گوی گشتاور دارد نیرو یِ موازی-با-صفحه یِ ناشی از صفحه است. این نیرو را با $(f,0)$ نشان میدهیم. گشتاورِ حاصل از این نیرو نسبت به مرکزِ گوی موازی بر صفحه است. آن را با $(\tau,0)$ نشان میدهیم. دیده میشود

$$\tau = -\mathrm{i}\,R\,f. \tag{7}$$

چون گوی کروی-متقارن است، لختی یِ دورانی یِ آن نسبت به مرکزَش یک تانسُرِ اسکالر است، و میشود به جا یِ آن لختی یِ دورانی یِ اسکالر را به کار برد. این را با I نشان میدهیم، و تعریف میکنیم

$$\alpha := \frac{m\,R^2}{I}, \tag{8}$$

که m جرمِ گوی است. α مجذورِ نسبتِ شعاعِ گوی به شعاعِ چرخشِ آن است (مثلَن [1]). به این ترتیب معادلاتِ گشتاور میشوند

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}\,\alpha}{m\,R}\,f, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega_\perp}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{10}$$

u (سرعتِ نقطه یِ تماسِ گوی با صفحه)، به $\omega_\perp$ بسته‌گی ندارد. با فرضِ این که بسته‌گی یِ نیروها یِ وارد بر گوی به سرعت، از طریقِ v (سرعتِ مرکزِ گوی) و u (سرعتِ نقطه یِ تماسِ گوی با صفحه) باشد، و این نیروها به جهتگیری یِ گوی هم بسته‌گی نداشته باشند، معلوم میشود $\omega_\perp$ در معادله یِ حرکتِ بقیه یِ متغیرها (z و v و ω) وارد نمیشود. از این پس چنین فرض میکنیم. معادله یِ تحول برا یِ v میشود

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\,(f+F'), \tag{11}$$

که F' بخش ی از F است که ناشی از صفحه نیست. یعنی F' بخشِ غیر-ِاصطکاکی یِ F است.

به جا یِ متغیرِ ω متغیرِ u را به کار میبریم. نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\,[(1+\alpha)\,f + F']. \tag{12}$$

به این ترتیب معادلاتِ تحول برا یِ متغیرها یِ z و v و u معادلاتِ (1) و (11) و (12) اند. از ترکیبِ (11) با (12) نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v - \frac{u}{1+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{m\,(1+\alpha)}\,F'. \tag{13}$$

میشود این را به جا یِ یک ی از معادلاتِ (11) یا (12) به کار برد. این معادله به ویژه زمان ی مناسب است که اصطکاک ایستایی است (پس f معلوم نیست ولی u معلوم است)، یا F' صفر است (تنهانیرو یِ افقی یِ وارد بر گوی اصطکاکِ ناشی از صفحه) است.

2.1 حرکتِ گوی بر یک صفحه یِ متحرک

یک صفحه را در نظر بگیرید که هر یک از نقطه‌ها یِ آن حرکت ی موازی با صفحه دارد. سرعتِ نقطه یِ z در صفحه در زمانِ t را با $V(z,t)$ نشان میدهیم. سرعتِ نقطه یِ تماسِ گوی با صفحه نسبت به صفحه را با u' نشان میدهیم. دیده میشود

$$u' = u - V. \tag{14}$$

f نیرو یِ اصطکاکِ ناشی از صفحه است. اگر گوی رو یِ صفحه بلغزد (u' صفر نباشد)، این اصطکاک جنبشی است و

$$\begin{aligned} f &= -\mu_{\mathrm{k}}\,\frac{u'}{|u'|}\,N,\\ &= -\mu_{\mathrm{k}}\,\frac{u-V}{|u-V|}\,N, \end{aligned} \tag{15}$$

که N بخشِ عمود-بر-صفحه یِ نیرو یی است که صفحه به گوی وارد میکند، و μ_{k} ضریبِ اصطکاکِ جنبشی است. برا یِ حلِ معادلاتِ حرکت باید F' و N را بدانیم.

اگر حرکتِ گوی بر صفحه غلتش باشد، f اصطکاکِ ایستایی است. در این صورت f نامعین است. در عوض میدانیم u' صفر است:

$$u = V. \tag{16}$$

از ترکیبِ این با (13) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{1+\alpha}\,\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}\,F'\right),\\ &= \frac{1}{1+\alpha}\,\left(\frac{\partial V}{\partial z}\,v + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\alpha}{m}\,F'\right), \end{aligned} \tag{17}$$

که همراه با (1) تحولِ z و v را میدهد، به شرط ی که F' و V را بدانیم.

یک حالت ِ خاص این است که تنهانیرو ی ِ افقی ی ِ وارد بر گوی نیرو ی ِ (اصطکاک ِ) ناشی از صفحه باشد:

$$F' = 0. \tag{18}$$

در این صورت (11) و (13) میشوند

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\, f, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} v - \frac{u}{1+\alpha} &= c,\\ &= v_0 - \frac{u_0}{1+\alpha}, \end{aligned} \tag{20}$$

که X_0 مقدار ِ کمیت ِ X در زمان ِ صفر است. توجه داریم که این رابطه‌ها مستقل از آن اند که اصطکاک جنبشی باشد (گوی بلغزد) یا ایستایی باشد (گوی نلغزد). اگر گوی بلغزد، مثلَن میشود u را از (20) حساب کرد و در (15) گذاشت. به این ترتیب f در (19) بر حسب ِ v و z و N به دست می‌آید. با دانستن ِ N، رابطه‌ها ی ِ (1) و (19) تحول ِ z و v را میدهند.

برا ی ِ غلتش ی در این وضعیت، (20) میشود

$$\begin{aligned} v - \frac{V}{1+\alpha} &= c,\\ &= v_0 - \frac{V(z_0, 0)}{1+\alpha}, \end{aligned} \tag{21}$$

با استفاده از (1)،

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \frac{V(z,t)}{1+\alpha} = v_0 - \frac{V(z_0, 0)}{1+\alpha}, \tag{22}$$

که یک معادله ی ِ دیفرانسیل ِ مرتبه ی ِ یک برا ی ِ z است.

یک نتیجه ی ِ (21) این است که اگر گوی از وضعیت ی شروع کند که در آن در غلتش است، و به وضعیت ی برسد که در آن هم در غلتش است، آنگاه اگر سرعت ِ سطح در این دُ وضعیت یکسان باشد سرعت ِ مرکز ِ گوی هم در این دُ وضعیت یکسان است، مستقل از این که بین ِ این دُ وضعیت چه بر سر ِ گوی آمده. از جمله اگر گوی از غلتش جا یی که صفحه ی ِ ساکن است شروع کند و به غلتش جا یی که باز هم صفحه ساکن است برسد، سرعت ِ نهایی یَش هم ان سرعت ِ اولیه اَش خاهد بود.

3 غلتشِ یک گوی بر یک میزِ افقیِ یِ چرخان

یک میزِ افقی را در نظر بگیرید که با سرعتِ زاویه‌ای یِ $(\Omega\,\boldsymbol{n})$ میچرخد. مبدئ را رو یِ محورِ دوران میگیریم. نتیجه میشود

$$V = \mathrm{i}\,\Omega\,z. \tag{23}$$

گوی یِ را در نظر بگیرید که رو یِ این میز میغلتد، و تنهانیرو یِ افقی یِ وارد بر آن گوی نیرو یِ (اصطکاکِ) ناشی از میز است. رابطه یِ (22) میشود

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \mathrm{i}\,\xi\,z = v_0 - \mathrm{i}\,\xi_0\,z_0, \tag{24}$$

که

$$\xi := \frac{\Omega}{1+\alpha}. \tag{25}$$

با تعریفِ

$$\phi(t) := \int_0^t \mathrm{d}t'\,\xi(t'), \tag{26}$$

از (24) نتیجه میشود

$$z(t) = \{\exp[\mathrm{i}\,\phi(t)]\}\left\{z_0 + (v_0 - \mathrm{i}\,\xi_0\,z_0)\int_0^t \mathrm{d}t'\,\exp[-\mathrm{i}\,\phi(t')]\right\}. \tag{27}$$

3.1 غلتشِ یک گوی بر یک میزِ افقیِ یِ چرخان با سرعتِ زاویه‌ای یِ ثابت

اگر Ω (و در نتیجه ξ) مستقل از زمان باشد،

$$\phi(t) = \xi\,t, \tag{28}$$

و از (27) نتیجه میشود

$$z(t) = z_0 + \frac{v_0}{\mathrm{i}\,\xi}\,[\exp(\mathrm{i}\,\xi\,t) - 1]. \tag{29}$$

این معادله یِ پارامتری یِ یک دایره به مرکزِ Z و شعاعِ R است، که

$$Z = z_0 - \frac{v_0}{\mathrm{i}\,\xi}, \tag{30}$$

$$R = \left|\frac{v_0}{\xi}\right|. \tag{31}$$

گوی با سرعت ِ زاویه‌ای یِ ξ بر این دایره حرکت میکند. دیده میشود این سرعت ِ زاویه‌ای به شرایط ِ اولیه یِ گوی بسته‌گی ندارد. در واقع تنهاپارامتر ی از گوی که در آن وارد میشود α است، که به فقط تُزیع ِجرم ِ نسبی یِ گوی بسته‌گی دارد.

3.2 گوی ِ غلتان ی که وارد ِ یک میز ِ چرخنده میشود و از آن بیرون میرود

گوی ی را در نظر بگیرید که رو یِ یک میز ِ افقی میغلتد. بخش ی از این میز قرص ی به شعاع ِ r است، که با سرعت ِ زاویه‌ای یِ ثابت ِ $(\Omega\,\boldsymbol{n})$ حُل ِ مرکز َش میچرخد. بقیه یِ میز ساکن است. گوی از بخش ِ ساکن وارد ِ بخش ِ چرخان میشود، و سپس از بخش ِ چرخان بیرون میرود. اصطکاک آن قدر زیاد است که بلافاصله پس از گذشتن ِ گوی از هر مرز، حرکت ِ گوی غلتش میشود. این مسئله از جمله در [2] بررسی شده است.

مبدئ را مرکز ِ بخش ِ چرخان، و زمان ِ ورود ِ گوی به بخش ِ چرخان را صفر میگیریم. مقدار ِ کمیت ِ X بلافاصله پیش از ورود ِ گوی به بخش ِ چرخان، بلافاصله پس از ورود ِ آن به بخش ِ چرخان، بلافاصله پیش از خروج ِ آن از بخش ِ چرخان، و بلافاصله پس از خروج ِ آن از بخش ِ چرخان را با به ترتیب X_1، X_0، X_{f}، و X_2 نشان میدهیم. دیده میشود v پیش از ورود ِ گوی به بخش ِ چرخان ثابت است، و پس از خروج ِ گوی از بخش ِ چرخان هم ثابت است. همچنین،

$$v_2 = v_1, \tag{32}$$

$$z_0 = z_1, \tag{33}$$

$$z_{\mathrm{f}} = z_2, . \tag{34}$$

از (21) نتیجه میشود

$$v_0 = v_1 + \mathrm{i}\,\xi\,z_1. \tag{35}$$

به این ترتیب، از (29) نتیجه میشود

$$z(t) = z_1\,\exp(\mathrm{i}\,\xi\,t) + \frac{v_1}{\mathrm{i}\,\xi}\,[\exp(\mathrm{i}\,\xi\,t) - 1], \tag{36}$$

همچنین، از (29) و (30) دیده میشود

$$Z = -\frac{v_1}{\mathrm{i}\,\xi}, \tag{37}$$

$$R = \left|\frac{v_1}{\xi} + \mathrm{i}\,z_1\right|. \tag{38}$$

از این که z_1 و z_2 رو یِ دُ دایره (یک ی به مرکز ِ مبدئ و یک ی به مرکز ِ Z) اند، نتیجه میشود

$$z_2^{\mathrm{c}}\,z_2 = z_1^{\mathrm{c}}\,z_1, \tag{39}$$

$$(z_2^{\mathrm{c}} - Z^{\mathrm{c}})\,(z_2 - Z) = (z_1^{\mathrm{c}} - Z^{\mathrm{c}})\,(z_1 - Z). \tag{40}$$

z_2^{c} را از (39) حساب میکنیم و در (40) میگذاریم. نتیجه میشود

$$(z_2 - z_1)\,(Z\,z_1^{\mathrm{c}} - Z^{\mathrm{c}}\,z_2) = 0. \tag{41}$$

از ریشه‌ها یِ این معادله برا یِ z_2، یک ی z_1 است، که هم ان نقطه یِ ورود است. نقطه یِ خروج ریشه یِ دیگر است. پس

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{Z}{Z^{\mathrm{c}}}\,z_1^{\mathrm{c}}, \\ &= -\frac{v_1}{v_1^{\mathrm{c}}}\,z_1^{\mathrm{c}}. \end{aligned} \tag{42}$$

از جمله دیده میشود

$$\frac{z_2 - z_1}{v_1} = -\frac{v_1\,z_1^{\mathrm{c}} + z_1\,v_1^{\mathrm{c}}}{|v_1|^2}. \tag{43}$$

کسر ِ طرف ِ راست حقیقی است. در واقع طرف ِ راست مثبت است. برا یِ دیدن ِ این توجه میکنیم که از (3) داریم

$$v_1\,z_1^{\mathrm{c}} + z_1\,v_1^{\mathrm{c}} = \left[\frac{\mathrm{d}(|z|^2)}{\mathrm{d}t}\right]_1. \tag{44}$$

مشتق ِ $|z|^2$ بلافاصله پیش از ورود ِ گوی به قرص ِ چرخان منفی است، در غیر ِ این صورت گوی وارد ِ قرص نمیشد. پس بردار ِ $(z_2 - z_1)$ با v_1 همجهت است. از این، همراه با این که v_2 هم ان v_1 است، نتیجه یِ ساده ای برا یِ مسیر ِ گوی به دست می‌آید:

گو یی که پیش از ورود به قرص ِ چرخان رو یِ یک خط ِ راست میغلتید، پس از خروج از قرص ِ چرخان به حرکت رو یِ هم ان خط با هم ان سرعت ادامه خاهد داد. البته این به شرط ی است که غلتش ِ

گوی (جز در مرز ِ قرص) حفظ شود. اگر نَ گوی پس از خروج از قرص و رسیدن به غلتش، رو یِ خط ی موازی با مسیر ِ اولیه و با هم ان سرعت ِ اولیه به حرکت ادامه میدهد.

گو یی که از قرص ِ چرخان بیرون میرود (با هم ان شرطها) رو یِ هم ان خط ِ اولیه به حرکت َش ادامه میدهد، اما نسبت به حالت ی که چرخش (ِقرص) نباشد یک تئخیر یا تقدم ِ زمانی میگیرد. تئخیر ِ زمانی را با ΔT نشان میدهیم:

$$\begin{aligned} \Delta T &= t_2 - \frac{z_2 - z_1}{v_1}, \\ &=: t_2 - T. \end{aligned} \tag{45}$$

T زمان ِ حرکت ِ گوی بین ِ z_1 و z_2 در نبود ِ چرخش است. از (36) و (42) نتیجه میشود

$$\exp(\mathrm{i}\,\xi\,t_2) = \frac{1 - \dfrac{\mathrm{i}\,\xi\,z_1^{\mathrm{c}}}{v_1^{\mathrm{c}}}}{1 + \dfrac{\mathrm{i}\,\xi\,z_1}{v_1}}. \tag{46}$$

تعریف میکنیم

$$\frac{\mathrm{i}\,\xi\,z_1}{v_1} =: \zeta\ \exp[-\mathrm{i}\,\gamma\,\mathrm{sgn}(\xi)], \tag{47}$$

که ζ و γ حقیقی اند و

$$0 \le \zeta, \tag{48}$$

$$0 \le \gamma \le \pi. \tag{49}$$

γ زاویه یِ سرعت ِ اولیه با سرعت ِ قرص در z_1 است. از (46) نتیجه میشود

$$t_2 = \frac{2}{|\xi|}\ \cot^{-1}\frac{1 + \zeta\ \cos\gamma}{\zeta\ \sin\gamma}. \tag{50}$$

از (43) و (47) نتیجه میشود

$$T = \frac{2\,\zeta}{|\xi|}\ \sin\gamma. \tag{51}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{\zeta\ \sin\gamma}\ \ \cot^{-1}\frac{1 + \zeta\ \cos\gamma}{\zeta\ \sin\gamma} - 1. \tag{52}$$

رُشن است که اگر تئخیر ِ زمانی یِ منفی باشد، یعنی گوی نسبت به حالت ِ نبود ِ چرخش جلُ میفتد. از جمله اگر سرعت ِ زاویه‌ای یِ چرخش بسیار بزرگ باشد، گوی حتمَن جلُ میفتد. همچنین دیده میشود تئخیر ِ زمانی وقت ی γ حاده است کمتر از حالت ی است که γ منفرجه است.

4 پانوشتها

[1] Keith R. Symon; “mechanics” (Addison-Wesley, 1974) chapter 5

[2] سامان مقیمی عراقی؛ مجله یِ فیزیک **16**، 4 (زمستان ِ 1377) 179 تا 181