X1-092 (2013/05/29)

اختلال ِ وابسته‌-به‌-زمان، جابه‌جایی یِ ویژه‌مقدار، و ماندگاری

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

اثر ِ اختلال بر یک سیستم ِ خطی با تحول ی یکانی بررسی میشود. بسته‌گی یِ زمانی یِ تصویر ِ حالت ِ سیستم در راستا یِ اولیه بررسی میشود (تا مرتبه یِ دُ یِ اختلال). از رو یِ آن جابه‌جایی ویژه‌مقدار، و ماندگاری یِ سیستم در حالت ِ اولیه به دست می‌آید.

0 درامد

سیستم ی را در نظر بگیرید که حالت َش با یک بردار در یک فضا یِ هیلبِرت [1] تُصیف میشود. میگویند این سیستم یک تحول ِ زمانی یِ یکانی دارد اگر ψ (حالت ِ سیستم) این معادله را براورَد.

$$\dot{\psi} = A\,\psi, \tag{1}$$

که $\dot{X}$ مشتق ِ X نسبت به t (زمان) است، و A یک عملگر ِ پادارِمیتی است. مثال ِ آشنا یِ چنین سیستم ی یک سیستم ِ کوانتمی است، که برا یِ آن

$$A = (\mathrm{i}\,\hbar)^{-1}\,H, \tag{2}$$

که H همیلتنی است. از این پس برا یِ تُصیف ِ سیستم هم ان اصطلاحها یِ معمول در کوانتم-مکانیک را به کار میبریم، هر چند رُشن است که ریاضیات ِ مسئله خاص ِ کوانتم-مکانیک نیست. چنان که در مثلَن فصل ِ 2 از [2] آمده، اگر H تابع ِ زمان نباشد جواب ِ معادله یِ تحول چنین است.

$$\psi(t) = \sum_j \exp\left(\frac{E_j\, t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)\, c_j(0)\, e_j, \tag{3}$$

که e پایه ای است چنان که e_j ها ویژه‌بردارها یِ همیلتنی و E_j ها ویژه‌مقدارها یِ متناظر (ویژه‌مقدارها یِ انرژی) اند:

$$H\, e_j = E_j\, e_j. \tag{4}$$

بررسی یِ اختلالی یِ تحول یعنی جواب ِ تحول ِ

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\dot\psi = (H+V)\,\psi, \tag{5}$$

را به شکل ِ یک بسط ِ توانی از V (در واقع عنصرها یِ ماتریسی یِ V) به دست آوریم. چنان که در مثلَن فصل ِ 5 از [2] آمده، وقت ی H مستقل از زمان است داریم

$$\psi(t) = \sum_j c_j(t)\, e_j, \tag{6}$$

که

$$\begin{aligned} c_j(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j_1\cdots j_n}\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_k\le t} \mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\, \exp\left[\frac{E_j\,(t-t_n)}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\,\frac{V_{j\,j_n}(t_n)}{\mathrm{i}\,\hbar}\\ \times\exp\left[\frac{E_{j_n}\,(t_n-t_{n-1})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\,\frac{V_{j_n\,j_{n-1}}(t_{n-1})}{\mathrm{i}\,\hbar}\,\exp\left[\frac{E_{j_{n-1}}\,(t_{n-1}-t_{n-2})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\\ \times\cdots\frac{V_{j_2\,j_1}(t_1)}{\mathrm{i}\,\hbar}\,\exp\left(\frac{E_{j_1}\,t_1}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)\,c_{j_1}(0), \end{aligned} \tag{7}$$

که

$$V_{k\,l} := e_k^\dagger\, V\, e_l, \tag{8}$$

و e یک پایه یِ یکه-متعامد است. از جمله به ازا یِ

$$c_l(0) = \delta_l^k, \tag{9}$$

داریم

$$
\begin{aligned}
s_{k\,k}(t)=\exp\left(\frac{E_k\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)\,\Bigg\{1&+\int_0^t \mathrm{d}u\,\frac{V_{k\,k}(u)}{\mathrm{i}\,\hbar}\\
&+\sum_l\int_0^t\mathrm{d}v\,\int_0^v\mathrm{d}u\,\exp\left[\frac{(E_l-E_k)\,(v-u)}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\,\frac{V_{k\,l}(v)}{\mathrm{i}\,\hbar}\,\frac{V_{l\,k}(u)}{\mathrm{i}\,\hbar}\Bigg\}\\
&+o(V^2),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

که $s_{j\,k}$ هم ان c_j با شرط ِ اولیه یِ (9) است. اگر V مستقل از زمان باشد،

$$
\begin{aligned}
s_{k\,k}(t)=\exp\left(\frac{E_k\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)\,\Bigg\{1&+\frac{V_{k\,k}\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\\
&+\sum_l\frac{|V_{l\,k}|^2}{(\mathrm{i}\,\hbar)^2}\,\int_0^t\mathrm{d}v\,\int_0^v\mathrm{d}u\,\exp\left[\frac{(E_l-E_k)\,(v-u)}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\Bigg\}+o(V^2).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

1 انرژی

اگر سیستم در یک ویژه‌بردار ِ همیلتنی (یِ کل) باشد، بسته‌گی یِ زمانی یِ حالت ِ سیستم نمایی خاهد بود. یعنی حالت ِ سیستم یک بردار ِ ثابت ضرب در یک تابع ِ نمایی از زمان خاهد بود. ضریب ِ آن بردار ِ ثابت را با c نشان میدهیم. E با

$$E=\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}(\ln c)}{\mathrm{d}t},\tag{12}$$

انرژی یِ سیستم است. اینجا هم برا یِ سیستم ی که از ویژه‌حالت ِ k ِ همیلتنی یِ مختل-نشده شروع کرده، انرژی یِ مئثر را به هم ین شکل تعریف میکنیم:

$$E_k^{\mathrm{eff}}(t):=\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}\{\ln[s_{k\,k}(t)]\}}{\mathrm{d}t}.\tag{13}$$

البته این تعریف مفید خاهد بود اگر طرف ِ راست ثابت باشد. داریم

$$
\begin{aligned}
\ln[s_{k\,k}(t)]=&\frac{E_k\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}+\frac{V_{k\,k}\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}-\frac{1}{2}\,\left(\frac{V_{k\,k}\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)^2\\
&+\sum_l\frac{|V_{l\,k}|^2}{(\mathrm{i}\,\hbar)^2}\,\int_0^t\mathrm{d}v\,\int_0^v\mathrm{d}u\,\exp\left[\frac{(E_l-E_k)\,(v-u)}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]+o(V^2),
\end{aligned}
$$

$$= \frac{E_k\,t}{\mathrm{i}\,\hbar} + \frac{V_{k\,k}\,t}{\mathrm{i}\,\hbar} + \sum_{l\neq k} \frac{|V_{l\,k}|^2}{(\mathrm{i}\,\hbar)^2} \int_0^t \mathrm{d}v \int_0^v \mathrm{d}u\ \exp\left[\frac{(E_l - E_k)\,(v-u)}{\mathrm{i}\,\hbar}\right] + o(V^2), \quad (14)$$

که نتیجه می‌دهد

$$E_k^{\mathrm{eff}}(t) = E_k + V_{k\,k} + \sum_{l\neq k} \frac{|V_{l\,k}|^2}{\mathrm{i}\,\hbar} \int_0^t \mathrm{d}u\ \exp\left[\frac{(E_l - E_k)\,(t-u)}{\mathrm{i}\,\hbar}\right] + o(V^2),$$
$$= E_k + V_{k\,k} + \sum_{l\neq k} \frac{|V_{l\,k}|^2}{\mathrm{i}\,\hbar} \int_0^t \mathrm{d}u\ \exp\left[\frac{(E_l - E_k)\,u}{\mathrm{i}\,\hbar}\right], \quad (15)$$

و از آنجا،

$$E_k^{\mathrm{eff}}(t) = E_k + V_{k\,k} + \sum_{l\neq k} \frac{|V_{l\,k}|^2}{E_k - E_l} \left\{1 - \exp\left[\frac{(E_l - E_k)\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\} + o(V^2). \quad (16)$$

از (7) دیده می‌شود

$$s_{l\,k}(t) = \exp\left(\frac{E_l\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right) \frac{V_{l\,k}}{\mathrm{i}\,\hbar} \int_0^t \mathrm{d}u\ \exp\left[\frac{(E_k - E_l)\,u}{\mathrm{i}\,\hbar}\right] + o(V), \qquad l \neq k. \quad (17)$$

به این ترتیب،

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|s_{l\,k}(t)|^2 = 2\left|\frac{V_{l\,k}}{\mathrm{i}\,\hbar}\right|^2 \mathrm{Re}\left\{\int_0^t \mathrm{d}u\ \exp\left[\frac{(E_l - E_k)\,(t-u)}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\} + o(V^2), \qquad l \neq k, \quad (18)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{l\neq k} |s_{l\,k}(t)|^2\right] = \frac{\Gamma_k(t)}{\hbar}, \quad (19)$$

که

$$\frac{\Gamma_k(t)}{\hbar} := 2\sum_{l\neq k}\left|\frac{V_{l\,k}}{\mathrm{i}\,\hbar}\right|^2 \mathrm{Re}\left\{\int_0^t \mathrm{d}u\ \exp\left[\frac{(E_l - E_k)\,u}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\} + o(V^2). \quad (20)$$

با استفاده از این، (16) می‌شود

$$E_k^{\mathrm{eff}}(t) = E_k + V_{k\,k} + \mathrm{Re}\left(\sum_{l\neq k} \frac{|V_{l\,k}|^2}{E_k - E_l} \left\{1 - \exp\left[\frac{(E_l - E_k)\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}\right) - \frac{\mathrm{i}\,\Gamma_k(t)}{2} + o(V^2). \quad (21)$$

دیده می‌شود جمله‌ها ی ِ سه‌وم و چهارم ِ عبارت ِ طرف ِ راست به زمان بسته‌گی دارد. پس در زمان‌ها ی ِ باپایان، رفتار ِ سیستم مثل ِ سیستم ی در یک ویژه‌حالت ِ انرژی نیست.

2 رفتارِ زمانها یِ بزرگ

با استفاده از

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{1-\exp(-\mathrm{i}\,s\,x)}{x}=\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x}\right)+\mathrm{i}\,\pi\,\delta(x), \tag{22}$$

که

$$\int \mathrm{d}x\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x}\right)\,\phi(x):=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}\right)\,\mathrm{d}x\,\frac{\phi(x)}{x}, \tag{23}$$

از (16) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}E_k^{\mathrm{eff}}(t)=E_k+V_{k\,k}+\sum_{l\ne k}|V_{l\,k}|^2\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{E_k-E_l}\right)\\ -\mathrm{i}\,\pi\sum_{l\ne k}|V_{l\,k}|^2\,\delta(E_k-E_l)+o(V^2),\qquad t\to\infty.\end{aligned} \tag{24}$$

سه جمله یِ اول هم ان سه جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (21) اند، که مجموع ِشان ویژه‌مقدار ِ همیلتنی یِ مختل-شده، تا مرتبه یِ 2 نسبت به V است. جمله یِ بعدی هم باقیمانده یِ طرف ِ راست ِ (21) است. به این ترتیب،

$$E_k^{\mathrm{eff}}=E_k^{\mathrm{pert}}-\frac{\mathrm{i}\,\Gamma_k}{2}, \tag{25}$$

که

$$\begin{aligned}E_k^{\mathrm{eff}}&:=\lim_{t\to\infty}E_k^{\mathrm{eff}}(t),\\ \Gamma_k&:=\lim_{t\to\infty}\Gamma_k(t),\end{aligned} \tag{26}$$

و البته

$$E_k^{\mathrm{pert}}=E_k+V_{k\,k}+\sum_{l\ne k}|V_{l\,k}|^2\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{E_k-E_l}\right), \tag{27}$$

$$\Gamma_k=2\,\pi\sum_{l\ne k}|V_{l\,k}|^2\,\delta(E_k-E_l), \tag{28}$$

که برا یِ مختصرنوشتن $o(V^2)$ حذف شده. دیده میشود در زمانها یِ بزرگ، $E_k^{\mathrm{eff}}(t)$ به یک مقدار ِ ثابت (ِ البته مختلط) میگراید.

یک راه ِ دیگر ِ رسیدن به هم ین نتیجه (مشابه با آنچه در مثلَن فصل ِ 5 از [2] به کار رفته) این است که (15) را چنین بنویسیم.

$$E_k^{\text{eff}}(t) = E_k + V_{k\,k} + \lim_{\eta\to 0^+} \sum_{l\ne k} \frac{|V_{l\,k}|^2}{\mathrm{i}\,\hbar} \int_0^t \mathrm{d}u\, \exp\left[\frac{(E_l - E_k - \mathrm{i}\,\eta)\,u}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]. \qquad (29)$$

داریم

$$\frac{1}{\mathrm{i}\,\hbar} \int_0^t \mathrm{d}u\, \exp\left[\frac{(E_l - E_k - \mathrm{i}\,\eta)\,u}{\mathrm{i}\,\hbar}\right] = \frac{1}{E_k - E_l + \mathrm{i}\,\eta} \times \left\{1 - \exp\left[\frac{(E_l - E_k - \mathrm{i}\,\eta)\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}. \qquad (30)$$

همچنین،

$$\lim_{t\to\infty} \left\{\exp\left[\frac{(E_l - E_k - \mathrm{i}\,\eta)\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\} = 0. \qquad (31)$$

به این ترتیب،

$$E_k^{\text{eff}} = E_k + V_{k\,k} + \lim_{\eta\to 0^+} \sum_{l\ne k} \frac{|V_{l\,k}|^2}{E_k - E_l + \mathrm{i}\,\eta}, \qquad (32)$$

که با استفاده از

$$\lim_{\eta\to 0^+} \frac{1}{x + \mathrm{i}\,\eta} = \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x}\right) - \mathrm{i}\,\pi\,\delta(x), \qquad (33)$$

به هم ان شکل ِ (24) در می‌آید. دیده میشود در زمانها یِ بزرگ انرژی یِ مئثر ِ سیستم به یک ثابت میگراید. این ثابت هم ان انرژی یِ مختل-شده، به اضافه یِ یک مقدار ِ مُهومی است، که این جمله یِ اخیر احتمال ِ یافتن ِ سیستم در حالت ِ اولیه را به طُر ِ نمایی با زمان کم میکند.

3 ماندگاری

$s_{k\,k}$ دامنه یِ احتمال ِ یافتن ِ سیستم در حالت ِ k است، وقت ی سیستم در زمان ِ صفر در حالت ِ k بوده است. به این ترتیب، به $|s_{k\,k}|^2$ ماندگاری یِ سیستم در حالت ِ k میگوییم، و آن را با σ_k نشان میدهیم. دیده میشود

$$\lim_{t\to\infty} \left\{\frac{1}{\sigma_k(t)} \frac{\mathrm{d}[\sigma_k(t)]}{\mathrm{d}t}\right\} = -\frac{\Gamma_k}{\hbar}, \qquad (34)$$

یا

$$\sigma_k(t) \sim \exp\left(-\frac{t}{\tau_k}\right), \qquad t\to\infty, \qquad (35)$$

که

$$\tau_k := \frac{\hbar}{\Gamma_k}. \tag{36}$$

سیستم ی که از حالت ِ (مختل-نشده یِ) k شروع کند، از این حالت نمایی وا میپاشد و عمر ِ واپاشی یَش τ است.

4 طیف ِ انرژی

رفتار ِ $s_{k\,k}(t)$ برا یِ زمانها یِ بزرگ نمایی است: یک T یِ بزرگ هست که

$$s_{k\,k}(t) = N\,\exp\left[\left(\frac{E_k^{\rm pert}}{\mathrm{i}\,\hbar} - \frac{\Gamma_k}{2\,\hbar}\right)\,t\right], \qquad t > T, \tag{37}$$

که N یک ثابت است. تبدیل ِ فوریه [3] یِ $s_{k\,k}$ طیف ِانرژی یِ سیستم ی را میدهد که از حالت ِ k شروع کرده. طیف ِ انرژی به گستره یِ زمانی یی که از آن برا یِ محاسبه یِ تبدیل ِ فوریه [3] استفاده شده بسته‌گی دارد. دامنه یِ طیف ِانرژی یِ متناظر با داده‌ها یِ مربوط به زمانها یِ بزرگ میشود

$$\begin{aligned} a_k(E) &= \int_T^\infty \mathrm{d}t\,\exp\left(-\frac{E\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)\,s_{k\,k}(t), \\ &= N\,\hbar\,\exp\left[\left(\frac{E_k^{\rm pert}-E}{\mathrm{i}\,\hbar} - \frac{\Gamma_k}{2\,\hbar}\right)\,T\right]\,\left[\frac{\Gamma_k}{2} - \mathrm{i}\,(E - E_k^{\rm pert})\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{38}$$

ρ_k (چگالی یِ انرژی) $|a_k|^2$ است. دیده میشود در ρ_k بسته‌گی به T در فقط یک ضریب ِ بهنجارش وارد میشود. این ضریب (N') را هم میشود با بهنجارکردن ِ ρ_k حساب کرد:

$$\rho_k(E) = N'\,\left[\left(\frac{\Gamma_k}{2}\right)^2 + (E - E_k^{\rm pert})^2\right]^{-1}. \tag{39}$$

دیده میشود انرژی یِ (حقیقی یِ) سیستم کاملَن معین نیست. اگر چنین میبود طیف ِ انرژی کاملَن تیز (دلتا یِ دیرَک [4]) میشد. طیف ِ انرژی پهنا دارد. یک مقیاس برا یِ این پهنا، پهنا یِ نصف ِارتفاع است: فاصله یِ 2 مقدار ِ E که به ازا یِشان ρ_k نصف ِ بیشینه اَش است. رُشن است که ρ_k در $E^{\rm pert}$ بیشینه میشود. همچنین،

$$\rho_k\left(E^{\rm pert} \pm \frac{\Gamma_k}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\rho_k(E^{\rm pert}). \tag{40}$$

از اینجا ΔE_k (پهنا یِ نصف ِارتفاع) میشود

$$\Delta E_k = \Gamma_k, \tag{41}$$

که با استفاده از (36) می‌شود

$$\Delta E_k = \frac{\hbar}{\tau_k}. \tag{42}$$

این یک گونه رابطه یِ عدم ِقطعیت ِ انرژی-زمان است: عدم ِقطعیت ِ انرژی یِ یک حالت ضرب در عمر ِ آن حالت، از مرتبه یِ ثابت ِ پْلانک [5] است.

5 پانوشت‌ها

[1] Hilbert

[2] J. J. Sakurai; "modern quantum mechanics" (Addison Wesley, 1995)

[3] Fourier

[4] Dirac

[5] Planck