X1-093 (2013/07/28)

تصویر ِ یک تُزیع ِ بار

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

تصویر ِ یک تُزیع ِ بار بر اساس ِ تصویر ِ بارها یِ نقطه‌ای بررسی میشود. فرمولبندی یِ کلی، و حالتها یِ خاص ِ تصویر در کره و صفحه، و تصویر ِ دُقطبی بررسی میشوند.

0 درامد

روش ِ تصویر برا یِ حل ِ یک معادله با چشمه در ناحیه یِ $\mathbb{V}$ از فضا این است که میکوشم چشمه ای بیابم که محمل َش در ناحیه یِ $\mathbb{V}'$ (متمم ِ ناحیه یِ $\mathbb{V}$) باشد، چنان که جواب ِ متناظر با این چشمه و چشمه یِ اولیه (در کل ِ فضا) شرایط ِ مرزی یِ مسئله یِ اولیه را براورَد. به چشمه ای که چنین ویژه‌گی یی دارد چشمه یِ تصویر میگویند.

مسئله یِ دیریکله [1] برا یِ پتانسیل ِ الکترُستاتیک، برا یِ فضا یِ درون یا بیرون ِ یک کره یِ رسانا، یا نیمفضا یی با مرز ِ رسانا، را میشود با روش ِ تصویر حل کرد. همچنین مسئله یِ دیریکله [1] برا یِ پتانسیل ِ الکترُستاتیک، برا یِ فضا یِ درون یا بیرون ِ یک استوانه یِ دوار ِ رسانا، به شرط ی که تُزیع ِ بار تحت ِ انتقال در راستا یِ محور ِ استوانه ناوردا باشد، به این روش حل میشود. مسئله یِ اخیر در واقع یک مسئله یِ دُبُعدی است که مرز ِ ناحیه یِ $\mathbb{V}$ یک دایره است. در هر یک از این مسئله‌ها، اگر

تُزیع ِبار ِ اولیه نقطه‌ای باشد تُزیع ِتصویر ِ نقطه‌ای هم وجود دارد. (وقت ی مرز استوانه است، نقطه‌ای به معنی یِ مسئله یِ دُبُعدی یِ مثتر ِ مُرد نظر است.) اگر تُزیع ِ بار شامل ِ چند بار ِ نقطه‌ای باشد هم، با استفاده از خطی-بودن ِ معادله یِ پُوَسُن [2] به ساده‌گی میشود تُزیع ِتصویر ی شامل ِ چند بار ِ نقطه‌ای به دست آورد. اینها را میشود در مثلَن فصل ِ 2 از [3] یافت. اگر تُزیع ِبار پیوسته باشد هم، برهمنهش راه ی برا یِ ساختن ِ تُزیع ِ تصویر میدهد. اینجا هدف بررسی یِ این وضعیت است.

1 فرمولبندی یِ کلی

بار ِ q در نقطه یِ $\boldsymbol{r}$ را در نظر بگیرید، چنان که $\boldsymbol{r}$ درون ِ ناحیه یِ $\mathbb{V}$ از فضا ست، و شرط ِ مرزی بر پتانسیل ِ الکتریکی در $\mathbb{S}$ (مرز ِ $\mathbb{V}$) خطی و همگن است. متمم ِ $\mathbb{V}$ را با $\mathbb{V}'$ نشان میدهم. فرض میکنم روش ِ تصویر با یک بار ِ نقطه‌ای در $\mathbb{V}'$ کار میکند. یعنی یک نقطه یِ $\boldsymbol{r}' \in \mathbb{V}'$ و یک مقدار ِ q' هست چنان که پتانسیل ِ حاصل از بار ِ q در $\boldsymbol{r}$ و بار ِ q' در $\boldsymbol{r}'$ شرط ِ مرزی در $\mathbb{S}$ را بر می‌آورَد، و

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

$$q' = [g(\boldsymbol{r})]\, q, \tag{2}$$

که دامنه یِ $\boldsymbol{f}$ و g مجموعه یِ $\mathbb{V}$ است، مقدار ِ g حقیقی است، و مقدار ِ $\boldsymbol{f}$ در $\mathbb{V}'$ است.

حالا یک چگالی-یِ-بار ِ ρ را در نظر بگیرید، که دامنه اَش $\mathbb{V}$ است. دنبال ِ چگالی-یِ-بار ِ ρ' ام که دامنه اَش $\mathbb{V}'$ باشد و پتانسیل ِ حاصل از ρ و ρ' شرط ِ مرزی در $\mathbb{S}$ را براورَد. نقطه یِ $\boldsymbol{r} \in \mathbb{V}$، و یک مجموعه یِ $\mathbb{N}$ به ابعاد ِ کوچک اطراف ِ آن را در نظر میگیرم. دارم

$$Q(\mathbb{N}) = [\mathrm{vol}(\mathbb{N})]\, \rho(\boldsymbol{r}) + o[\mathrm{vol}(\mathbb{N})], \tag{3}$$

که Q بار و vol حجم است. مجموعه یِ $\mathbb{N}$ و بار َش تقریبَن مثل ِ یک بار ِ نقطه ای یِ $Q(\mathbb{N})$ در نقطه یِ $\boldsymbol{r}$ است. پس تصویر َش را میشود مثل ِ تصویر ِ یک بار ِ نقطه‌ای ساخت. دقیقتر َش این است که $\mathbb{N}'$ را تصویر ِ $\mathbb{N}$ تحت ِ $\boldsymbol{f}$ میگیرم، و بار ِ درون ِ $\mathbb{N}'$ را تقریبَن چیز ی میگیرم که از (2) به دست

می‌آید:

$$f(\mathbb{N}) =: \mathbb{N}', \tag{4}$$

$$Q'(\mathbb{N}') = [g(\boldsymbol{r})]\, Q(\mathbb{N}) + o[\mathrm{vol}(\mathbb{N})], \tag{5}$$

که Q' بارِ تصویر است. ρ' را از روی $Q'(\mathbb{N}')$ میسازم:

$$Q'(\mathbb{N}') = [\mathrm{vol}(\mathbb{N}')]\, \rho'(\boldsymbol{r}') + o[\mathrm{vol}(\mathbb{N}')], \tag{6}$$

به این ترتیب دیده میشود

$$\begin{aligned}\rho'(\boldsymbol{r}') &= \lim_{\mathbb{N}\to 0} \frac{Q'(\mathbb{N}')}{\mathrm{vol}(\mathbb{N}')},\\ &= [g(\boldsymbol{r})] \left[\lim_{\mathbb{N}\to 0} \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{N})}{\mathrm{vol}(\mathbb{N}')}\right] \rho(\boldsymbol{r}),\end{aligned} \tag{7}$$

که منظور از $(\mathbb{N} \to 0)$ این است که همه ی ابعادِ $\mathbb{N}$ به صفر بگراید (قطرِ $\mathbb{N}$ به صفر بگراید). دارم

$$\lim_{\mathbb{N}\to 0} \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{N}')}{\mathrm{vol}(\mathbb{N})} = |\det[(\boldsymbol{\partial f})(\boldsymbol{r})]|. \tag{8}$$

به این ترتیب،

$$\rho'(\boldsymbol{r}') = \frac{[g(\boldsymbol{r})]\, \rho(\boldsymbol{r})}{|\det[(\boldsymbol{\partial f})(\boldsymbol{r})]|}. \tag{9}$$

میشود هم نوشت

$$\rho'[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})] = \left[\frac{g\,\rho}{|\det(\boldsymbol{\partial f})|}\right](\boldsymbol{r}), \tag{10}$$

$$\rho' = \left[\frac{g\,\rho}{|\det(\boldsymbol{\partial f})|}\right] \circ \boldsymbol{f}^{-1}. \tag{11}$$

2 تصویر در کره

$\mathbb{V}$ رامجموعه ی D بُعدی یِ درون (یا بیرون) ِ کره ای $(D-1)$ بُعدی به شعاعِ R به مرکزِ مبدئ میگیرم. پتانسیلِ حاصل از بارِ q در نقطه ی $\boldsymbol{r}$ را با $\phi_{q,\boldsymbol{r}}$ نشان میدهم. دارم

$$\phi_{q,\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{s}) = \frac{K_{\mathrm{D}}\, q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^{D-2}}, \tag{12}$$

که $K_{\rm D}$ ثابت ی است که به بُعد بسته‌گی دارد. البته رابطه یِ بالا به شرط ی درست است که D برابرِ 2 نباشد. دنبالِ q' و $\boldsymbol{r}'$ ام، چنان که

$$\phi_{q,\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{s})+\phi_{q',\boldsymbol{r}'}(\boldsymbol{s})=0,\qquad |\boldsymbol{s}|=R. \tag{13}$$

از تقارنِ $\phi_{q,\boldsymbol{r}}$ نسبت به دَوَرانها یی که $\boldsymbol{r}$ را ثابت نگه میدارند نتیجه میشود $\phi_{q',\boldsymbol{r}'}$ هم باید نسبت به دَوَرانها یی که $\boldsymbol{r}$ را ثابت نگه میدارند تقارن داشته باشد. این نتیجه میدهد $\boldsymbol{r}'$ با $\boldsymbol{r}$ موازی است:

$$\boldsymbol{r}'=a\,\boldsymbol{r}. \tag{14}$$

شرطِ لازم برا یِ برقراری یِ (13) این است که

$$\frac{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|}=\text{constnat},\qquad |\boldsymbol{s}|=R, \tag{15}$$

و این یعنی

$$\frac{a^2\,|\boldsymbol{r}|^2+R^2-2\,a\,R\,|\boldsymbol{r}|\,\cos\alpha}{|\boldsymbol{r}|^2+R^2-2\,R\,|\boldsymbol{r}|\,\cos\alpha}=\text{constnat}, \tag{16}$$

که α زاویه یِ $\boldsymbol{r}$ با $\boldsymbol{s}$ است. به این ترتیب،

$$|\boldsymbol{r}|^2\,a^2-(|\boldsymbol{r}|^2+R^2)\,a+R^2=0. \tag{17}$$

این معادله برا یِ a دُ جواب دارد. یک جواب 1 است. این جواب پذیرفتنی نیست، چون معنی یِش این است که $\boldsymbol{r}'$ هم ان $\boldsymbol{r}$ است، در حال ی که بارِ تصویر باید در $\mathbb{V}'$ باشد. پس فقط یک جوابِ پذیرفتنی برا یِ a هست:

$$a=\frac{R^2}{|\boldsymbol{r}|^2}. \tag{18}$$

با این جواب، دیده میشود

$$\frac{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|}=\frac{R}{|\boldsymbol{r}|},\qquad |\boldsymbol{s}|=R, \tag{19}$$

که نتیجه میدهد

$$q'=-q\left(\frac{R}{|\boldsymbol{r}|}\right)^{D-2}. \tag{20}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})=\frac{R^2}{|\boldsymbol{r}|^2}\,\boldsymbol{r}, \tag{21}$$

$$g(\boldsymbol{r})=-\left(\frac{R}{|\boldsymbol{r}|}\right)^{D-2}. \tag{22}$$

از اینجا،

$$[(\boldsymbol{\partial f})(\boldsymbol{r})]\,\boldsymbol{u} = \frac{R^2}{|\boldsymbol{r}|^2}\;\left[\boldsymbol{u} - 2\,\frac{\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})}{|\boldsymbol{r}|^2}\right],$$
$$= \frac{R^2}{|\boldsymbol{r}|^2}\,(\boldsymbol{u}_\perp - \boldsymbol{u}_\parallel), \qquad (23)$$

که بخش ِ عمودی ($\perp$) و موازی ($\|$) نسبت به $\boldsymbol{r}$ تعریف شده:

$$\boldsymbol{u}_\perp := \boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})}{|\boldsymbol{r}|^2}, \qquad (24)$$
$$\boldsymbol{u}_\parallel := \frac{\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})}{|\boldsymbol{r}|^2}. \qquad (25)$$

از (23) دیده میشود

$$\det[(\boldsymbol{\partial f})(\boldsymbol{r})] = -\left(\frac{R^2}{|\boldsymbol{r}|^2}\right)^D. \qquad (26)$$

به این ترتیب،

$$\rho'\left(\frac{R^2}{|\boldsymbol{r}|^2}\,\boldsymbol{r}\right) = -\left(\frac{|\boldsymbol{r}|}{R}\right)^{D+2}\rho(\boldsymbol{r}), \qquad (27)$$
$$\rho'(\boldsymbol{r}') = -\left(\frac{R}{|\boldsymbol{r}'|}\right)^{D+2}\rho\left(\frac{R^2}{|\boldsymbol{r}'|^2}\,\boldsymbol{r}'\right), \qquad (28)$$

که در رابطه یِ اخیر این به کار رفته که

$$|\boldsymbol{r}'|\,|\boldsymbol{r}| = R^2, \qquad (29)$$
$$\boldsymbol{r} = \frac{R^2}{|\boldsymbol{r}'|^2}\,\boldsymbol{r}'. \qquad (30)$$

3 تصویر در صفحه

تصویر ِ تُزیع ِ بار در صفحه را میشود حالت ِ خاص ِ تصویر در کره گرفت. بار ی در نقطه یِ $\boldsymbol{r}$ را در نظر میگیرم. به جا یِ صفحه یِ رسانا کره ای به شعاع ِ R و مرکز ِ $(\boldsymbol{r}_0 + R\,\hat{\boldsymbol{n}})$ میگیرم، که $\boldsymbol{r}_0$ یک نقطه یِ نقطه یِ صفحه یِ رسانا ست، و $\hat{\boldsymbol{n}}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر صفحه است. چنین کره ای در $(R\to\infty)$ به صفحه یِ اولیه میگراید. (21) برا یِ تصویر در کره میشود

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_R(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}_0 + R\,\hat{\boldsymbol{n}} + \frac{R^2}{|\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}_0 + R\,\hat{\boldsymbol{n}})|^2}\,[\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}_0 + R\,\hat{\boldsymbol{n}})]. \qquad (31)$$

فرقِ $\tilde{\boldsymbol{f}}_R$ با $\boldsymbol{f}$ در (21) این است که اینجا مرکزِ کره مبدئ نیست، در $(\boldsymbol{r}_0 + R\,\hat{\boldsymbol{n}})$ است. در $(R \to \infty)$ شکلِ $\tilde{\boldsymbol{f}}_R$ ساده میشود:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{f}}_R(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{r}_0 + R\,\hat{\boldsymbol{n}} - R\left|\hat{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}}{R}\right|^{-2}\left(\hat{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}}{R}\right),\\ &= \boldsymbol{r}_0 + R\,\hat{\boldsymbol{n}} - R\left(1 - 2\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}}{R}\right)\left(\hat{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}}{R}\right) + o(1),\\ &= \boldsymbol{r} - 2\,\hat{\boldsymbol{n}}[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)] + o(1).\end{aligned} \tag{32}$$

با تعریفِ

$$\lim_{R\to\infty}\tilde{\boldsymbol{f}}_R =: \tilde{\boldsymbol{f}}, \tag{33}$$

دیده میشود

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} - 2\,\hat{\boldsymbol{n}}\,[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)]. \tag{34}$$

$\tilde{\boldsymbol{f}}$ تصویرکردن در صفحه است، و دیده میشود به جا یِ $\boldsymbol{r}_0$ هر نقطه یِ دیگر ی از صفحه که بگذاریم هم نتیجه تغییر نمیکند.

متناظر با $\tilde{\boldsymbol{f}}_R$ و $\tilde{\boldsymbol{f}}$، به ترتیب $\tilde{g}_R$ و $\tilde{g}$ میشوند

$$\tilde{g}_R(\boldsymbol{r}) = -\left[\frac{R}{|\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}_0 + R\,\hat{\boldsymbol{n}})|}\right]^{D-2}, \tag{35}$$

$$\tilde{g}(\boldsymbol{r}) = -1. \tag{36}$$

سرانجام، دیده میشود برا یِ تصویر در صفحه،

$$\rho'\{\boldsymbol{r} - 2\,\hat{\boldsymbol{n}}\,[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)]\} = -\rho(\boldsymbol{r}), \tag{37}$$

$$\rho'(\boldsymbol{r}') = -\rho\{\boldsymbol{r}' - 2\,\hat{\boldsymbol{n}}\,[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0)]\}. \tag{38}$$

4 تصویرِ دُقطبی

چگالی یِ متناظر با بارِ q در نقطه یِ $\boldsymbol{a}$ را با $\rho_{q,\boldsymbol{a}}$ نشان میدهم:

$$\rho_{q,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{r}) = q\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}). \tag{39}$$

تصویرِ این چگالی میشود $(\rho_{q\,\boldsymbol{a}})'$، که

$$
\begin{aligned}
(\rho_{q,\boldsymbol{a}})'(\boldsymbol{r}') &= \frac{(g\circ\boldsymbol{f}^{-1})(\boldsymbol{r}')}{|\det\{(\boldsymbol{\partial f})[\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{r}')]\}|}\,(\rho\circ\boldsymbol{f}^{-1})(\boldsymbol{r}'),\\
&= q\,\frac{(g\circ\boldsymbol{f}^{-1})(\boldsymbol{r}')}{|\det\{(\boldsymbol{\partial f})[\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{r}')]\}|}\,\delta[\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{r}')-\boldsymbol{a}],\\
&= q\,\frac{g(\boldsymbol{a})}{|\det[(\boldsymbol{\partial f})(\boldsymbol{a})]|}\,\frac{\delta[\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]}{|\det\{[\boldsymbol{\partial}(\boldsymbol{f}^{-1})][\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]\}|},\\
&= [q\,g(\boldsymbol{a})]\,\delta[\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})],
\end{aligned}
\tag{40}
$$

یا

$$
(\rho_{q,\boldsymbol{a}})' = \rho_{[q\,g(\boldsymbol{a})],[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]},
\tag{41}
$$

که نتیجه یِ عجیب ی نیست. در واقع هم ان است که تصویرِ بار q در $\boldsymbol{a}$ بارِ $[q\,g(\boldsymbol{a})]$ در $[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]$ است.

چگالی یِ متناظر با دُقطبی یِ $\boldsymbol{p}$ در نقطه یِ $\boldsymbol{a}$ را با $\rho_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}}$ نشان میدهم. دُقطبی یِ $\boldsymbol{p}$ در نقطه یِ $\boldsymbol{a}$ حدِ مجموعه یِ بارها یِ q در $(\boldsymbol{a}+q^{-1}\,\boldsymbol{p})$ و $(-q)$ در $\boldsymbol{a}$ در $(q\to\infty)$ است. پس،

$$
\begin{aligned}
\rho_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{r}) &= \lim_{q\to\infty}\{q\,[\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}-q^{-1}\,\boldsymbol{p})-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})]\},\\
&= -(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\partial}\delta)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}),\\
&= (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{a}}\delta)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}),
\end{aligned}
\tag{42}
$$

که $\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{a}}$ مشتقگیری نسبت به $\boldsymbol{a}$ است.

این که رابطه یِ ρ' با ρ خطی است را میشود به کار برد و با استفاده از (41) تُزیعِ متناظر با تصویرِ دُقطبی را به دست آورد. از

$$
\rho_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{a}}\rho_{1,\boldsymbol{a}},
\tag{43}
$$

نتیجه میشود

$$
(\rho_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}})' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{a}}(\rho_{1,\boldsymbol{a}})',
\tag{44}
$$

یا

$$
\begin{aligned}
(\rho_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}})'(\boldsymbol{r}') &= \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{a}}\{[g(\boldsymbol{a})]\,\delta[\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]\},\\
&= [(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\partial}g)(\boldsymbol{a})]\,\delta[\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]\\
&\quad -[g(\boldsymbol{a})]\,\Big(\{[(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{f}](\boldsymbol{a})\}\cdot.\boldsymbol{\partial}\delta\Big)[\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})].
\end{aligned}
\tag{45}
$$

با تعریفها یِ

$$
\mathsf{q}' = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\partial}g)(\boldsymbol{a}),
\tag{46}
$$

$$
\boldsymbol{p}' = [g(\boldsymbol{a})]\,[(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{f}](\boldsymbol{a}),
\tag{47}
$$

دیده میشود

$$
(\rho_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}})' = \rho_{\mathsf{q}',\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})} + \rho_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}.
\tag{48}
$$

این یعنی تصویرِ دُقطبی، علاوه بر دُقطبی ممکن است یک تکقطبی (بارِ نقطه‌ای) هم داشته باشد. برا یِ تصویر در کره، از (22) و (23) دیده میشود

$$
\mathsf{q}' = (D-2)\,\left(\frac{R}{|\boldsymbol{a}|}\right)^{D-2}\,\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{a}|^2},
\tag{49}
$$

$$
\boldsymbol{p}' = \left(\frac{R}{|\boldsymbol{a}|}\right)^{D}\,(\boldsymbol{p}_\parallel - \boldsymbol{p}_\perp),
\tag{50}
$$

که موازی و عمود نسبت به $\boldsymbol{a}$ تعریف شده اند. برا یِ تصویر در صفحه هم، به ساده‌گی دیده میشود

$$
\mathsf{q}' = 0,
\tag{51}
$$

$$
\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}_\parallel - \boldsymbol{p}_\perp.
\tag{52}
$$

دیده میشود در بُعدِ 2 (تصویر در استوانه)، و برا یِ تصویر در صفحه، تصویرِ دُقطبی فقط یک دُقطبی است. در این حالتها تصویرِ هر بارِ نقطه‌ای قرینه یِ آن بار است، بنابراین بارِ کلِ تصویر هم (مثلِ بارِ دُقطبی یِ تصویرشونده) صفر است. همچنین اگر دُقطبی بر خطِ واصلِ دُقطبی به مرکزِ کره عمود باشد، تصویرِ دُقطبی فقط یک دُقطبی است. اگر دُقطبی را از دُ بارِ قرینه یِ هم بسازیم، دیده میشود در این حالت بارها یِ تصویرشده ضریبِ یکسان ی از بارها یِ سازنده یِ دُقطبی یِ اولیه اند. پس باز هم بارِ کلِ تصویر صفر است.

5 پانوشتها

[1] Dirichlet

[2] Poisson

[3] John David Jackson; “classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1999)