X1-094 (2013/08/31)

خمینه‌ها یِ گروهها یِ $\mathrm{SU}(2)$ و $\mathrm{SO}(3)$

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

خمینه‌ها یِ گروهها یِ $\mathrm{SU}(2)$ و $\mathrm{SO}(3)$، و رابطه یِ اینها با فضا یِ خطی یِ سه‌بُعدی یِ حقیقی بررسی میشود.

1 خمینه یِ $\mathrm{SU}(2)$

گروه ِ $\mathrm{SU}(2)$ مجموعه یِ همه یِ ماتریسها یِ 2×2 یِ یکانی با دترمینان ِ یک است. U را یک عضو ِ دلبخاه ِ این گروه میگیرم. دیده میشود

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$$a\,\bar{a}+b\,\bar{b}=1. \tag{2}$$

$$c\,\bar{c}+d\,\bar{d}=1. \tag{3}$$

$$a\,\bar{c}+b\,\bar{d}=0. \tag{4}$$

$$a\,d-b\,c=1. \tag{5}$$

(2) تا (4) شرطها یِ یکانیت ِ U اند، و (5) شرط ِ این است که دترمینان ِ U یک باشد. با این شرطها میشود بعض ی از چهار متغیر ِ مختلط ِ U را بر حسب ِ بقیه حساب کرد:

$$\begin{aligned}
d\,\bar{d}&=(b\,\bar{b}+a\,\bar{a})\,d\,\bar{d},\\
&=(b\,\bar{d})\,(\bar{b}\,d)+(a\,\bar{a})\,(d\,\bar{d}),\\
&=(-a\,\bar{c})\,(-\bar{a}\,c)+(a\,\bar{a})\,(d\,\bar{d}),\\
&=a\,\bar{a}\,(c\,\bar{c}+d\,\bar{d}),\\
&=a\,\bar{a}.
\end{aligned} \tag{6}$$

به هم ین ترتیب،

$$\begin{aligned}
b\,\bar{b}&=b\,\bar{b}\,(c\,\bar{c}+d\,\bar{d}),\\
&=(b\,\bar{b})\,(c\,\bar{c})+(b\,\bar{d})\,(\bar{b}\,d),\\
&=(b\,\bar{b})\,(c\,\bar{c})+(-a\,\bar{c})\,(-\bar{a}\,c),\\
&=(b\,\bar{b}+a\,\bar{a})\,c\,\bar{c},\\
&=c\,\bar{c}.
\end{aligned} \tag{7}$$

در نتیجه،

$$|d|=|a|. \tag{8}$$

$$|b|=|c|. \tag{9}$$

به این ترتیب عددها یِ مختلطِ ζ و ζ' با قدرمطلقِ یک هستند که

$$d = \zeta\,\bar{a}. \tag{10}$$

$$b = -\zeta'\,\bar{c}. \tag{11}$$

اینها را در (4) میگذارم:

$$a\,\bar{c}\,(1 - \zeta'\,\bar{\zeta}) = 0. \tag{12}$$

اگر a و c هیچ یک صفر نباشند، ضریبِ $(a\,\bar{c})$ در (12) صفر است. اگر a (c) صفر باشد، ζ (ζ') دلبخاه است و میشود ضریبِ $(a\,\bar{c})$ در (12) را صفر انتخاب کرد. پس حتمَن یا با انتخاب،

$$\zeta' = \zeta. \tag{13}$$

به این ترتیب شرطِ یکانیتِ U میشود

$$U = \begin{pmatrix} a & -\zeta\,\bar{c} \\ c & \zeta\,\bar{a} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

$$|a|^2 + |c|^2 = 1. \tag{15}$$

$$|\zeta|^2 = 1. \tag{16}$$

دیده میشود در این صورت،

$$\det U = \zeta\,(|a|^2 + |c|^2). \tag{17}$$

پس شرطِ این که دترمینانِ U یک باشد این است که

$$\zeta = 1. \tag{18}$$

شرطِ این که U عضوِ $\mathrm{SU}(2)$ باشد این است که

$$U = \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

$$|a|^2 + |c|^2 = 1. \tag{15}$$

رابطه یِ (15) را میشود بر حسبِ بخشها یِ حقیقی و مُهومی یِ a و c نوشت:

$$[\mathrm{Re}(a)]^2 + [\mathrm{Im}(a)]^2 + [\mathrm{Re}(c)]^2 + [\mathrm{Im}(c)]^2 = 1. \tag{20}$$

این معادله یِ یک کره در یک فضا یِ چهاربُعدی یِ حقیقی است. به هم ین خاطر میگویند خمینه یِ SU(2) یک $\mathbb{S}_3$ (کره یِ سه‌بُعدی) است.

یک عضوِ SU(2) را میشود بر حسبِ سه پارامترِ حقیقی (مثلَن بر حسبِ زاویه‌ها یِ a و c، و طولِ a) هم نوشت. با تعریفِ

$$a =: |a|\ \exp(-\mathrm{i}\,\alpha), \tag{21}$$

$$c =: |c|\ \exp(-\mathrm{i}\,\gamma), \tag{22}$$

و نیز ماتریسها یِ پاؤلی [1] با

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

دیده میشود

$$U = \left\{\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\,\sigma_3}{2}\,(\alpha-\gamma)\right]\right\}\,U_2\,\left\{\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\,\sigma_3}{2}\,(\alpha+\gamma)\right]\right\}, \tag{26}$$

که

$$U_2 = \begin{pmatrix} |a| & -|c| \\ |c| & |a| \end{pmatrix}. \tag{27}$$

با تعریفِ

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,\theta}{2}\right) = |a| + \mathrm{i}\,|c|, \tag{28}$$

دیده میشود

$$U_2 = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,\sigma_2}{2}\,\theta\right). \tag{29}$$

سرانجام، تعریف میکنم

$$\phi = \alpha - \gamma. \tag{30}$$

$$\psi = \alpha + \gamma. \tag{31}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi, \theta, \psi), \\ &:= \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,\sigma_3}{2}\,\phi\right)\right]\,\left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,\sigma_2}{2}\,\theta\right)\right]\,\left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,\sigma_3}{2}\,\psi\right)\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

به (ϕ, θ, ψ) پارامترها یِ اُیلِر [2] میگویند.

از (21) و (22) و (29) دیده میشود گستره ای از مقدارها یِ (α, γ, θ) که همه یِ اعضا یِ گروه ِ $\mathrm{SU}(2)$ را بدهد و عضو ِ تکراری ندهد *تقریبَن* میشود

$$\alpha \in (-\pi, \pi]. \tag{33}$$

$$\gamma \in (-\pi, \pi]. \tag{34}$$

$$\theta \in [0, \pi]. \tag{35}$$

منظور از *تقریبَن* این است که که اگر $(\theta = 0)$، مقدار ِ γ مهم نیست، و اگر $(\theta = \pi)$، مقدار ِ α مهم نیست. ضمنَن رُشن است که برا یِ هر یک از گسترهها یِ α و γ، میشود به جا یِ $(-\pi, \pi]$ هر بازه یِ یک-سر-باز-یک-سر-بسته یِ دیگر ی به طول ِ $(2\,\pi)$ هم گذاشت. البته با استفاده از (30) و (31) میشود رابطهها یِ (33) و (34) را بر حسب ِ ϕ و ψ نوشت:

$$-2\,\pi < (\psi + \phi) \leq 2\,\pi. \tag{36}$$

$$-2\,\pi < (\psi - \phi) \leq 2\,\pi. \tag{37}$$

رابطهها یِ (21) و (22) هم بر حسب ِ ϕ و ψ میشوند

$$a =: |a|\,\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\psi + \phi}{2}\right), \tag{38}$$

$$c =: |c|\,\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\psi - \phi}{2}\right), \tag{39}$$

نگاشت ِ انتقال به اندازه یِ $(y^1,\dots)$ را با $\mathrm{T}_{(y^1,\dots,y^n)}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathrm{T}_{(\phi_0,\psi_0)}(\phi,\psi):=(\phi+\phi_0,\psi+\psi_0). \tag{40}$$

ناحیه ای که با (36) و (37) تُصیف میشود یک مربع در صفحه یِ (ϕ,ψ) است، که آن را $\mathbb{C}$ مینامم. بخشها یی از $\mathbb{C}$ که در ربعها یِ اول و دوم و سهوم و چهارم ِ صفحه اند را، به ترتیب، $\mathbb{I}$ و $\mathbb{II}$ و $\mathbb{III}$ و $\mathbb{IV}$ مینامم. با استفاده از (38) و (39)، یا (30) و (32)، دیده میشود

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi+2\,\pi,\theta,\psi+2\,\pi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi). \tag{41}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi-2\,\pi,\theta,\psi+2\,\pi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi). \tag{42}$$

این یعنی عضو ِ $\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi)$ در اثر ِ انتقال ِ (ϕ,ψ) با $(2\,\pi,2\,\pi)$ یا $(-2\,\pi,2\,\pi)$، یا البته با هر ترکیب ِ خطی از اینها با ضریبها یِ صحیحی، عوض نمیشود. تعریف میکنم

$$\mathbb{III}':=\mathrm{T}_{(2\,\pi,2\,\pi)}(\mathbb{III}). \tag{43}$$

$$\mathbb{II}':=\mathrm{T}_{(2\,\pi,-2\,\pi)}(\mathbb{II}). \tag{44}$$

$$\mathbb{IV}':=\mathrm{T}_{(-2\,\pi,2\,\pi)}(\mathbb{IV}). \tag{45}$$

تعریف میکنم

$$\mathbb{C}_1:=\mathbb{I}\cup\mathbb{II}'\cup\mathbb{III}'\cup\mathbb{IV}. \tag{46}$$

$$\mathbb{C}_2:=\mathbb{I}\cup\mathbb{II}\cup\mathbb{III}'\cup\mathbb{IV}'. \tag{47}$$

گستره ی مقدارها یِ (ϕ,ψ) را به جا یِ $\mathbb{C}$ میشود $\mathbb{C}_1$ یا $\mathbb{C}_2$ گرفت:

$$\mathbb{C}_1:\qquad (\phi,\psi)\in[0,2\,\pi)\times[-2\,\pi,2\,\pi). \tag{48}$$

$$\mathbb{C}_2:\qquad (\phi,\psi)\in[-2\,\pi,2\,\pi)\times[0,2\,\pi). \tag{49}$$

به این ترتیب گستره ای از مقدارها یِ (ϕ,θ,ψ) که همه یِ اعضا یِ گروه ِ $\mathrm{SU}(2)$ را بدهد و عضو ِ تکراری ندهد را میشود *تعریبَن* $\mathbb{D}_{\mathrm{SU}(2),1}$ یا $\mathbb{D}_{\mathrm{SU}(2),2}$ گرفت:

$$\mathbb{D}_{\mathrm{SU}(2),1}:\qquad (\phi,\theta,\psi)\in[0,2\,\pi)\times[0,\pi]\times[-2\,\pi,2\,\pi). \tag{50}$$

$$\mathbb{D}_{\mathrm{SU}(2),2}:\qquad (\phi,\theta,\psi)\in[-2\,\pi,2\,\pi)\times[0,\pi]\times[0,2\,\pi). \tag{51}$$

از (32) دیده میشود $\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}$ یک-به-یک نیست. از (32)، یا از (28) و (38) و (39)، دیده میشود

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi+4\,\pi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi). \tag{52}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,-\theta,\psi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi-\pi,\theta,\psi+\pi). \tag{53}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta+2\,\pi,\psi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi). \tag{54}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi+2\,\pi,\theta,\psi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi). \tag{55}$$

از (28) و (38) و (39) ضمنَن معلوم است که

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi+\chi,0,\psi-\chi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,0,\psi). \tag{56}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi+\chi,\pi,\psi+\chi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\pi,\psi). \tag{57}$$

به این ترتیب دیده میشود خمینه یِ $\mathrm{SU}(2)$ هم ان $\mathbb{R}^3$ (فضا یِ خطی یِ سه‌بُعدی یِ حقیقی) تقسیم بر رابطه‌ها یِ هم‌ارزی یِ متناظر با (52) تا (57) است. از (32)، یا از (28) و (38) و (39)، ضمنَن دیده میشود

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi)=-\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi). \tag{58}$$

2 خمینه یِ $\mathrm{SO}(3)$

گروه ِ $\mathrm{SO}(3)$ مجموعه یِ همه یِ ماتریسها یِ 3×3 یِ متعامد با دترمینان ِ یک است. میشود این گروه را برا یِ هر میدان ی (از جمله عددها یِ مختلط) تعریف کرد، اما اینجا منظور میدان ِ عددها یِ حقیقی و ماتریسها یِ حقیقی است. $\boldsymbol{e}$ را یک پایه یِ یکه-متعامد ِ فضا یِ سه‌بُعدی (یِ حقیقی) میگیرم. U را یک عضو ِ این گروه میگیرم. تعریف میکنم

$$U\,\boldsymbol{e}_3=:\boldsymbol{n}. \tag{59}$$

چون U متعامد است، $\boldsymbol{n}$ یکه است. پس یک (θ,ϕ) هست که

$$\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{e}_1\,\cos\phi+\boldsymbol{e}_2\,\sin\phi)\,\sin\theta+\boldsymbol{e}_3\,\cos\theta. \tag{60}$$

در واقع (θ,ϕ) مختصات ِ زاویه‌ای یِ کروی یِ جهت ِ $\boldsymbol{n}$ است. همه یِ بردارها یِ یکه یِ $\boldsymbol{n}$ با این گستره از (θ,ϕ) به دست می‌آیند:

$$\theta \in [0,\pi]. \tag{35}$$

$$\phi \in (-\pi,\pi]. \tag{61}$$

رابطه یِ $\boldsymbol{n}$ ها با (θ,ϕ) ها در گستره یِ بالا هم *تقریبَن* یک-به-یک است. *تقریبَن* به این معنی که اگر θ برابر ِ 0 یا π باشد، مقدار ِ ϕ در $\boldsymbol{n}$ وارد نمیشود.

با تعریف ِ ماتریسها یِ M_i با

$$(M_i)^j{}_k := \varepsilon^j{}_{i\,k}, \tag{62}$$

که ε تانسُر ِ لِوی-چیویتا [3] است، از (59) دیده میشود

$$\boldsymbol{n} = [\exp(\phi\, M_3)]\,[\exp(\theta\, M_2)]\,\boldsymbol{e}_3. \tag{63}$$

از مقایسه یِ این با (58) هم نتیجه میشود

$$\{[\exp(\phi\, M_3)]\,[\exp(\theta\, M_2)]\}^{-1}\,U\,\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3, \tag{64}$$

یعنی یک ماتریس ِ 3×3 یِ V هست که

$$U = [\exp(\phi\, M_3)]\,[\exp(\theta\, M_2)]\,V. \tag{65}$$

$$V\,\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3. \tag{66}$$

هر یک از ماتریسها یِ $[\exp(\phi\, M_3)]$ و $[\exp(\theta\, M_2)]$ متعامد با دترمینان ِ یک است. U هم چنین است. پس V هم متعامد با دترمینان ِ یک است. از این، همراه با (64) نتیجه میشود یک ψ هست که

$$V = \exp(\psi\, M_3). \tag{67}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi),\\ &:= [\exp(\phi\, M_3)]\,[\exp(\theta\, M_2)]\,[\exp(\psi\, M_3)]. \end{aligned} \tag{68}$$

اینجا هم به (ϕ,θ,ψ) پارامترها یِ اُیلِر [2] میگویند. گستره ای از ψ که به ازا یِ آن رابطه یِ ψ با V یک-به-یک است $[0,2\,\pi)$، یا هر بازه یِ یک-سر-باز-یک-سر-بسته یِ دیگر به پهنا یِ $(2\,\pi)$ است. به این ترتیب گستره ای از مقدارها یِ (ϕ,θ,ψ) که همه یِ اعضا یِ گروه ِ $\mathrm{SO}(3)$ را بدهد و عضو ِ تکراری ندهد را میشود *تقریبَن* $\mathbb{D}_{\mathrm{SO}(3)}$ گرفت:

$$\mathbb{D}_{\mathrm{SO}(3)}:\qquad (\phi,\theta,\psi)\in[0,2\,\pi)\times[0,\pi]\times[0,2\,\pi). \tag{69}$$

اختلاف ِ $\mathbb{D}_{\mathrm{SO}(3)}$ با $\mathbb{D}_{\mathrm{SU}(2),1}$ یا $\mathbb{D}_{\mathrm{SU}(2),2}$، گستره‌ها یِ متناظر با $\mathrm{SU}(2)$، این است که در $\mathbb{D}_{\mathrm{SU}(2),1}$ یا $\mathbb{D}_{\mathrm{SU}(2),2}$ از پهنا یِ بازه یِ متناظر با ϕ و بازه یِ متناظر با ψ یک ی $(4\,\pi)$ و دیگری $(2\,\pi)$ است، در حال ی که در $\mathbb{D}_{\mathrm{SO}(3)}$ پهنا یِ بازه یِ متناظر با ϕ و پهنا یِ بازه یِ متناظر با ψ هردُ $(2\,\pi)$ اند. مانسته‌ها یِ رابطه‌ها یِ (52) تا (58) برا یِ $\mathrm{SO}(3)$ هم میشوند

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi+4\,\pi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi). \tag{70}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,-\theta,\psi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi-\pi,\theta,\psi+\pi). \tag{71}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta+2\,\pi,\psi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi). \tag{72}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi+2\,\pi,\theta,\psi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi). \tag{73}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi+\chi,0,\psi-\chi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,0,\psi). \tag{74}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi+\chi,\pi,\psi+\chi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\pi,\psi). \tag{75}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi). \tag{76}$$

به این ترتیب دیده میشود خمینه یِ $\mathrm{SO}(3)$ هم ان $\mathbb{R}^3$ (فضا یِ خطی یِ سه‌بُعدی یِ حقیقی) تقسیم بر رابطه‌ها یِ هم‌ارزی یِ متناظر با (70) تا (76) است.

تعریف میکنم

$$\mathfrak{C}[\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi)]:=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi), \tag{77}$$

و دیده میشود $\mathfrak{C}$ یک تناظر ِ 2 به 1 بین ِ $\mathrm{SU}(2)$ و $\mathrm{SO}(3)$ است:

$$\mathfrak{C}(-U)=\mathfrak{C}(U). \tag{78}$$

از (19) و (20) دیده میشود تبدیل ِ U به $(-U)$ در $\mathrm{SU}(2)$ تبدیل ِ یک نقطه در کره یِ سه‌بُعدی به نقطه یِ متقاطر َش است. به این ترتیب خمینه یِ $\mathrm{SO}(3)$ هم ان کره یِ سه‌بُعدی است که نقطه‌ها یِ

متقاطر َش یکسان شده. به این مجموعه $\mathbb{RP}_3$ (فضا یِ افکنشی یِ حقیقی یِ سه‌بُعدی) میگویند. به هم ین خاطر میگویند خمینه یِ $SO(3)$ یک $\mathbb{RP}_3$ است.

3 پانوشتها

[1] Pauli

[2] Euler

[3] Levi-Civita