X1-095 (2013/10/30)

نگاشتها یِ تعریف-شده بر $\mathrm{SU}(2)$ و $\mathrm{SO}(3)$

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

پایه ای برا یِ نگاشتها یِ تعریف-شده بر $\mathrm{SU}(2)$ یا $\mathrm{SO}(3)$ جسته میشود، که اثر ِ اعضا یِ گروه بر آن ساده باشد، شبیه ِ هماهنگها یِ کروی برا یِ نگاشتها یی که دامنه یشان کره یِ 2 بُعدی است.

0 درامد

نگاشتها یِ تعریف-شده بر کره یِ دُبُعدی ($\mathbb{S}_2$) را میشود بر حسب ِ هماهنگها یِ کروی بسط داد. هماهنگها یِ کروی ویژه‌بردارها یِ مولد ِ دَوَران حُل ِ یک محور، و مجذور ِ مولد ِ دَوران اند. کره یِ سه‌بُعدی ($\mathbb{S}_3$) خمینه یِ گروه ِ $\mathrm{SU}(2)$ است، که بر آن هم میشود اثر ِ خُد ِ گروه را تعریف کرد. فضا یِ افکنشی یِ حقیقی یِ سه‌بُعدی ($\mathbb{RP}_3$) خمینه یِ گروه ِ $\mathrm{SO}(3)$ است.

هدف یافتن ِ پایه ای برا یِ فضا یِ نگاشتها یی با دامنه یِ $\mathbb{S}_3$ یا $\mathbb{RP}_3$ است، که اثر ِ مولدها یِ اثر ِ گروه بر اعضا یِ این پایه ساده باشد، شبیه ِ اثر ِ مولدها یِ دَوَران در $\mathbb{S}_2$ بر هماهنگها یِ کروی. این مقاله ادامه یِ [1] است و در آن تعریفها، نمادگذاریها، و نتایج ِ [1] به کار رفته است.

1 اثر ِ گروه بر گروه

اثر ِ گروه بر خُد َش را میشود به شکل ِ اثر از چپ، اثر از راست، و ترکیب ِ اینها تعریف کرد. متناظر با عضو ِ V از گروه، اثر از چپ و اثر از راست را با به ترتیب $\mathfrak{L}(V)$ و $\mathfrak{R}(V)$ نشان میدهم، و آنها را چنین تعریف میکنم که اگر U عضو ِ گروه باشد

$$[\mathfrak{L}(V)](U) := V\,U. \tag{1}$$

$$[\mathfrak{R}(V)](U) := U\,V. \tag{2}$$

به ساده‌گی دیده میشود اگر V_1 و V_2 دُ عضو ِ گروه باشند،

$$[\mathfrak{L}(V_1)]\circ[\mathfrak{L}(V_2)] = \mathfrak{L}(V_1\,V_2). \tag{3}$$

$$[\mathfrak{R}(V_1)]\circ[\mathfrak{R}(V_2)] = \mathfrak{R}(V_2\,V_1). \tag{4}$$

$$[\mathfrak{L}(V_1)]\circ[\mathfrak{R}(V_2)] = [\mathfrak{R}(V_2)]\circ[\mathfrak{L}(V_1)]. \tag{5}$$

متناظر با با عضو ِ V از گروه، الحاقی یِ V را با $\mathfrak{A}(V)$ نشان میدهم، و آن را چنین تعریف میکنم که اگر U عضو ِ گروه باشد

$$[\mathfrak{A}(V)](U) := V\,U\,V^{-1}. \tag{6}$$

رُشن است که

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(V) &= [\mathfrak{L}(V)]\circ[\mathfrak{R}(V^{-1})],\\ &= [\mathfrak{L}(V)]\circ[\mathfrak{R}(V)]^{-1},\\ &= [\mathfrak{R}(V^{-1})]\circ[\mathfrak{L}(V)],\\ &= [\mathfrak{R}(V)]^{-1}\circ[\mathfrak{L}(V)]. \end{aligned}\tag{7}$$

2 میدانها یِ ناوردا

گروه ِ لی [2] یِ $\mathbb{G}$ را در نظر میگیرم. میگویم میدان ِ برداری یِ u در $\mathbb{G}$ چپ-ناوردا ست، اگر اثر ِ پیشران ِ اثرازچپ بر آن همانی باشد، یعنی

$$\forall\, V \in \mathbb{G}\ :\quad [\mathfrak{L}(V)]_*\, u = u. \tag{8}$$

مجموعه یِ میدانها یِ برداری یِ چپ-ناوردا را با $\mathbb{L}(\mathbb{G})$ نشان میدهم. این مجموعه با فضا یِ مماس بر خمینه یِ گروه در مبدئ (همانی یِ گروه) یکریخت است. یکریختی یی که بر میدانها یِ چپ-ناوردا اثر میکند و بردارها یِ فضا یِ مماس در مبدئ را میدهد را با $\tau^{\mathfrak{L}}$ نشان میدهم:

$$\tau^{\mathfrak{L}}(u) = u(\mathbf{1}), \tag{9}$$

که $\mathbf{1}$ همانی یِ گروه است. e را یک پایه برا یِ فضا یِ مماس در مبدئ میگیرم. با تعریف ِ

$$\mathfrak{l}_i := (\tau^{\mathfrak{L}})^{-1}\, e_i, \tag{10}$$

دیده میشود $\mathfrak{l}$ یک پایه برا یِ میدانها یِ چپ-ناوردا ست. رُشن است که

$$\mathfrak{l}_i(\mathbf{1}) = e_i. \tag{11}$$

دیده میشود u با

$$u = u^i\, \mathfrak{l}_i \tag{12}$$

چپ-ناوردا ست، اگر و تنها اگر u^i ها ثابت باشند.

شارش ِ میدان ِ برداری یِ u را با $\mathrm{fl}(u)$ نشان میدهم. با استفاده از شارش ِ میدانها یِ چپ-ناوردا، یک دسته مختصات ِ خاص برا یِ گروه تعریف میکنم:

$$U(\boldsymbol{x}) := [\mathrm{fl}(x^i\, \mathfrak{l}_i)](\mathbf{1}), \tag{13}$$

که $(x^1, \cdots)$ را با $\boldsymbol{x}$ نشان داده ام، و x^i ها ثابت اند. به $\boldsymbol{x}$ مختصات ِ جبری میگویم.

میدان ِ برداری یِ چپ-ناوردا یِ u را در نظر میگیرم. میخاهم اثر ِ $\mathrm{fl}(u)$ بر یک V یِ دلبخاه در $\mathbb{G}$ را حساب کنم. این را به کار میبرم که اگر v یک میدان ِ برداری و f یک نگاشت ِ وارونپذیر ِ هموار باشد،

$$f \circ [\mathrm{fl}(v)] \circ f^{-1} = \mathrm{fl}(f_*\, v). \tag{14}$$

به این ترتیب،

$$
\begin{aligned}
[\mathfrak{fl}(u)](V) &= \{[\mathfrak{fl}(u)]\circ[\mathfrak{L}(V)]\}(\mathbf{1}),\\
&= \{[\mathfrak{L}(V)]\circ[\mathfrak{L}(V)]^{-1}\circ[\mathfrak{fl}(u)]\circ[\mathfrak{L}(V)]\}(\mathbf{1}),\\
&= \Big[[\mathfrak{L}(V)]\circ\Big(\mathfrak{fl}\{[\mathfrak{L}(V^{-1})]_*\,u\}\Big)\Big](\mathbf{1}),
\end{aligned} \tag{15}
$$

که نتیجه میدهد

$$
[\mathfrak{fl}(u)](V) = V\,\{[\mathfrak{fl}(u)](\mathbf{1})\}, \tag{16}
$$

یعنی

$$
\mathfrak{fl}(u) = \mathfrak{R}\{[\mathfrak{fl}(u)](\mathbf{1})\}, \qquad u\in[\mathbb{L}(\mathbb{G})]. \tag{17}
$$

از جمله بر حسب ِ مختصات ِ جبری،

$$
[\mathfrak{fl}(x^i\,\mathfrak{l}_i)][U(\boldsymbol{y})] = [U(\boldsymbol{y})]\,[U(\boldsymbol{x})]. \tag{18}
$$

نکته این که $[\mathfrak{fl}(x^i\,\mathfrak{l}_i)]$ یک نگاشت از گروه به گروه است، و $[U(\boldsymbol{x})]$ و $[U(\boldsymbol{y})]$ عضو ِ گروه اند.

به عنوان ِ یک نتیجه، اگر u یک میدان ِ برداری یِ چپ-ناوردا باشد،

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1} &= \{[\mathfrak{fl}(-u)]\circ[\mathfrak{fl}(u)]\}(\mathbf{1}),\\
&= [\mathfrak{fl}(-u)]\{[\mathfrak{fl}(u)](\mathbf{1})\},\\
&= \{[\mathfrak{fl}(u)](\mathbf{1})\}\,\{[\mathfrak{fl}(-u)](\mathbf{1})\},
\end{aligned} \tag{19}
$$

که نتیجه میدهد

$$
[\mathfrak{fl}(-u)](\mathbf{1}) = \{[\mathfrak{fl}(u)](\mathbf{1})\}^{-1}, \qquad u\in[\mathbb{L}(\mathbb{G})]. \tag{20}
$$

میدانها یِ برداری یِ راست-ناوردا هم مشابه با میدانها یِ برداری یِ چپ-ناوردا تعریف میشوند، ویژه‌گیها یِشان به شکل ِ مشابه ی به دست می‌آیند. میگویم میدان ِ برداری یِ u در $\mathbb{G}$ راست-ناوردا ست، اگر اثر ِ پیشران ِ اثرازراست بر آن همانی باشد، یعنی

$$
\forall V\in\mathbb{G}\ :\quad [\mathfrak{R}(V)]_*\,u = u. \tag{21}
$$

مجموعه یِ میدانها یِ برداری یِ راست-ناوردا را با $\mathbb{R}(\mathbb{G})$ نشان میدهم. این مجموعه با فضا یِ مماس بر خمینه یِ گروه در مبدئ یکریخت است. یکریختی یی که اینها را به هم مربوط میکند را با $\tau^{\mathfrak{R}}$ نشان

میدهم:

$$\tau^{\mathfrak{R}}(u) = u(\mathbf{1}), \tag{22}$$

با تعریف ِ

$$\mathfrak{r}_i := (\tau^{\mathfrak{R}})^{-1}\, e_i, \tag{23}$$

دیده میشود $\mathfrak{r}$ یک پایه برا یِ میدانها یِ راست-ناوردا ست، و

$$\mathfrak{r}_i(\mathbf{1}) = e_i. \tag{24}$$

u با

$$u = u^i\, \mathfrak{r}_i \tag{25}$$

راست-ناوردا ست، اگر و تنها اگر u^i ها ثابت باشند.

میدان ِ برداری یِ راست-ناوردا یِ u را در نظر میگیرم. اگر V در $\mathbb{G}$ باشد،

$$[\mathrm{fl}(u)](V) = \{[\mathrm{fl}(u)](\mathbf{1})\}\, V, \tag{26}$$

یعنی

$$\mathrm{fl}(u) = \mathfrak{L}\{[\mathrm{fl}(u)](\mathbf{1})\}, \qquad u \in [\mathbb{R}(\mathbb{G})]. \tag{27}$$

دیده میشود میدانها یِ برداری یِ راست-ناوردا هم رابطه ای مشابه با (20) را بر میاورند:

$$[\mathrm{fl}(-u)](\mathbf{1}) = \{[\mathrm{fl}(u)](\mathbf{1})\}^{-1}, \qquad u \in [\mathbb{R}(\mathbb{G})]. \tag{28}$$

جابه‌جاگر ِ دُ میدان ِ برداری یِ چپ-ناوردا یک میدان ِ برداری یِ چپ-ناوردا، و جابه‌جاگر ِ دُ میدان ِ برداری یِ راست-ناوردا یک میدان ِ برداری یِ راست-ناوردا ست. جابه‌جاگر ِ u و v را با $u \diamond v$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$\mathfrak{l}_i \diamond \mathfrak{l}_j = f^m{}_{i\,j}\, \mathfrak{l}_m, \tag{29}$$

که $f^m{}_{i\,j}$ ها ثابت اند. به $f^m{}_{i\,j}$ ها ثابتها یِ ساختار میگویند. به فضا یِ میدانها یِ برداری یِ چپ-ناوردا یِ گروه ِ لی [2] یِ $\mathbb{G}$ همراه با عمل ِ جابه‌جایی، جبر ِ لی [2] یِ گروه ِ $\mathbb{G}$ میگویند. برا یِ میدانها یِ برداری یِ راست-ناوردا هم

$$\mathfrak{r}_i \diamond \mathfrak{r}_j = -f^m{}_{i\,j}\, \mathfrak{r}_m. \tag{30}$$

سرانجام، جابه‌جاگر ِ یک میدان ِ برداری یِ چپ-ناوردا و یک میدان ِ برداری یِ راست-ناوردا صفر است. از جمله

$$\mathfrak{l}_i \diamond \mathfrak{r}_j = 0. \tag{31}$$

از این که میدانها یِ برداری یِ چپ-ناوردا با میدانها یِ برداری یِ راست-ناوردا جابه‌جا میشوند، نتیجه میشود شارشها یِ متناظر هم با هم جابه‌جا میشوند. به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \mathrm{fl}(u+v) &= [\mathrm{fl}(u)] \circ [\mathrm{fl}(v)], \\ &= [\mathrm{fl}(v)] \circ [\mathrm{fl}(u)], \qquad (u,v) \in \{[\mathbb{L}(\mathbb{G})] \times [\mathbb{R}(\mathbb{G})]\}. \end{aligned} \tag{32}$$

ازجمله اگر V در $\mathbb{G}$ باشد،

$$[\mathrm{fl}(u+v)](V) = \{[\mathrm{fl}(v)](\mathbf{1})\}\, V\, \{[\mathrm{fl}(u)](\mathbf{1})\}, \qquad (u,v) \in \{[\mathbb{L}(\mathbb{G})] \times [\mathbb{R}(\mathbb{G})]\}. \tag{33}$$

اینها را (با نمادگذاری یی متفاوت) میشود در مثلَن فصل ِ 15 از [3] یافت.

میگویم میدان ِ برداری یِ u یک میدان ِ برداری یِ الحاقی است، اگر u تفاضل ِ یک میدان ِ برداری یِ چپ-ناورداو یک میدان ِ برداری یِ راست-ناوردا باشد و در مبدئ صفر شود. (رُشن است که به جا یِ تفاضل میشود مجموع هم گذاشت.) پس u الحاقی است، اگر میدانها یِ برداری یِ v و w باشند که v چپ-ناوردا و w راست-ناوردا ست و

$$u = v - w, \tag{34}$$

$$u(\mathbf{1}) = 0. \tag{35}$$

از بسط ِ میدانها یِ برداری یِ چپ-ناوردا و راست-ناوردا:

$$v = v^i\, \mathfrak{l}_i, \tag{36}$$

$$w = w^i\, \mathfrak{r}_i, \tag{37}$$

همراه با (11) و (24) دیده میشود (35) هم‌ارز است با

$$w^i = v^i. \tag{38}$$

به این ترتیب $(\mathfrak{l}-\mathfrak{r})$ یک پایه برا یِ میدانها یِ برداری یِ الحاقی است: میدان ِ برداری یِ u الحاقی است، اگر و تنها اگر اسکالرها یِ ثابت ِ u^i ی باشند که

$$u = u^i\,(\mathfrak{l}_i - \mathfrak{r}_i). \tag{39}$$

مجموعه یِ میدانها یِ برداری یِ الحاقی را با $\mathbb{A}(\mathbb{G})$ نشان میدهم. میدان ِ برداری یِ الحاقی یِ u را در نظر میگیرم. از (35) نتیجه میشود

$$[\mathrm{fl}(u)](\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \qquad u \in [\mathbb{A}(\mathbb{G})]. \tag{40}$$

با استفاده از (32) و با شکل ِ (39) برا یِ u، نتیجه میشود

$$\{[\mathrm{fl}(-u^i\,\mathfrak{r}_i)] \circ [\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{l}_i)]\}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \tag{41}$$

یا

$$[\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{r}_i)](\mathbf{1}) = [\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{l}_i)](\mathbf{1}). \tag{42}$$

حالا V در $\mathbb{G}$ را میگیرم. از (33) و رابطه یِ بالا و (20) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
[\mathrm{fl}(u)](V) &= \{[\mathrm{fl}(-u^i\,\mathfrak{r}_i)](\mathbf{1})\}\,V\,\{[\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{l}_i)](\mathbf{1})\},\\
&= \{[\mathrm{fl}(-u^i\,\mathfrak{l}_i)](\mathbf{1})\}\,V\,\{[\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{l}_i)](\mathbf{1})\},\\
&= \{[\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{l}_i)](\mathbf{1})\}^{-1}\,V\,\{[\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{l}_i)](\mathbf{1})\},\\
&= \{[\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{r}_i)](\mathbf{1})\}^{-1}\,V\,\{[\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{r}_i)](\mathbf{1})\}.
\end{aligned} \tag{43}$$

به این ترتیب، شارش ِ یک میدان ِ برداری یِ الحاقی یک تبدیل ِ تشابهی است:

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}[u^i\,(\mathfrak{l}_i - \mathfrak{r}_i)] &= \mathfrak{A}\Big(\{[\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{l}_i)](\mathbf{1})\}^{-1}\Big),\\
&= \Big(\mathfrak{A}\{[\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{l}_i)](\mathbf{1})\}\Big)^{-1},\\
&= \mathfrak{A}\Big(\{[\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{r}_i)](\mathbf{1})\}^{-1}\Big),\\
&= \Big(\mathfrak{A}\{[\mathrm{fl}(u^i\,\mathfrak{r}_i)](\mathbf{1})\}\Big)^{-1}.
\end{aligned} \tag{44}$$

با استفاده از (29) تا (31)، جابه‌جاگرها یِ میدانها یِ برداری یِ الحاقی با یکدیگر و با میدانها یِ برداری یِ چپ-ناوردا و راست-ناوردا هم به دست می‌آید. تعریف میکنم

$$\mathfrak{j}_i := \mathfrak{l}_i - \mathfrak{r}_i. \tag{45}$$

دیده میشود $\{(i, \mathfrak{j}_i) \mid i\}$ یک پایه برا یِ میدانها یِ برداری یِ الحاقی است، و

$$\mathfrak{j}_i \diamond \mathfrak{l}_j = f^m{}_{i\,j}\, \mathfrak{l}_m, \tag{46}$$

$$\mathfrak{j}_i \diamond \mathfrak{r}_j = f^m{}_{i\,j}\, \mathfrak{r}_m, \tag{47}$$

$$\mathfrak{j}_i \diamond \mathfrak{j}_j = f^m{}_{i\,j}\, \mathfrak{j}_m. \tag{48}$$

رابطه یِ (16) را میشود برا یِ محاسبه یِ $\mathfrak{l}_i$ ها به کار برد. بسطِ $\mathfrak{l}_i$ بر حسبِ $\mathfrak{b}$ را به کار میبرم، که $\mathfrak{b}$ یک پایه یِ مختصاتی یِ فضا یِ مماس است:

$$\mathfrak{l}_i = \mathfrak{l}_i^\alpha\, \mathfrak{b}_\alpha. \tag{49}$$

از (16) دیده میشود

$$\mathfrak{l}_i^\alpha(V) = \left[\frac{\partial}{\partial s^i}\Big(V\,\{[\mathrm{fl}(s^j\, \mathfrak{l}_j)](\mathbf{1})\}\Big)^\alpha\right]_{s=0}, \tag{50}$$

که X^α ها مختصاتِ X اند، هم ان مختصات ی که $\mathfrak{b}$ متناظرِ شان است. به هم ین ترتیب، از (26) دیده میشود

$$\mathfrak{r}_i^\alpha(V) = \left[\frac{\partial}{\partial s^i}\Big(\{[\mathrm{fl}(s^j\, \mathfrak{l}_j)](\mathbf{1})\}\,V\Big)^\alpha\right]_{s=0}, \tag{51}$$

و از (45)،

$$\begin{aligned}\mathfrak{j}_i^\alpha(V) &= \left\{\frac{\partial}{\partial s^i}\left[\Big(V\,\{[\mathrm{fl}(s^j\, \mathfrak{l}_j)](\mathbf{1})\}\Big)^\alpha - \Big(\{[\mathrm{fl}(s^j\, \mathfrak{l}_j)](\mathbf{1})\}\,V\Big)^\alpha\right]\right\}_{s=0},\\ &= \left[\frac{\partial}{\partial s^i}\Big(\{[\mathrm{fl}(-s^k\, \mathfrak{l}_k)](\mathbf{1})\}\,V\,\{[\mathrm{fl}(s^j\, \mathfrak{l}_j)](\mathbf{1})\}\Big)^\alpha\right]_{s=0}.\end{aligned} \tag{52}$$

3 خمینه‌ها یِ SU(2) و SO(3)

چنان که در [1] آمده، اعضا یِ SU(2) و SO(3) را میشود با پارامترها یِ اُیلِر [4] مشخص کرد. این اعضا متناظر با پارامترها یِ (ϕ, θ, ψ) را با، به ترتیب، $\mathrm{E}_{\mathrm{SU(2)}}(\phi, \theta, \psi)$ و $\mathrm{E}_{\mathrm{SO(3)}}(\phi, \theta, \psi)$ نشان میدهم:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi) := [\exp(\phi\, N_3)]\,[\exp(\theta\, N_2)]\,[\exp(\psi\, N_3)], \tag{53}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi) := [\exp(\phi\, M_3)]\,[\exp(\theta\, M_2)]\,[\exp(\psi\, M_3)], \tag{54}$$

که

$$N_j = -\frac{\mathrm{i}\,\sigma_j}{2}, \tag{55}$$

که σ_j ها ماتریسها یِ پاؤلی [5] اند:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{56}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \tag{57}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{58}$$

و

$$(M_j)^k{}_l := \varepsilon^k{}_{j\,l}, \tag{59}$$

و ε تانسُر ِ لِوی-چیویتا [6] است. $\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}$ و $\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}$ یکبه‌یک نیستند. برا یِ $\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}$،

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi+4\,\pi) = \mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi). \tag{60}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,-\theta,\psi) = \mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi-\pi,\theta,\psi+\pi). \tag{61}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta+2\,\pi,\psi) = \mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi). \tag{62}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi+2\,\pi,\theta,\psi) = \mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi). \tag{63}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi+\chi,0,\psi-\chi) = \mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,0,\psi). \tag{64}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi+\chi,\pi,\psi+\chi) = \mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\pi,\psi). \tag{65}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi) = -\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi). \tag{66}$$

گستره ای از مقدارها یِ (ϕ,θ,ψ) که همه یِ اعضا یِ گروه ِ $\mathrm{SU}(2)$ را بدهد و عضو ِ تکراری ندهد را میشود *تقریبَن* $\mathbb{D}_{\mathrm{SU}(2),1}$ یا $\mathbb{D}_{\mathrm{SU}(2),2}$ گرفت:

$$\mathbb{D}_{\mathrm{SU}(2),1}: \qquad (\phi,\theta,\psi)\in[0,2\,\pi)\times[0,\pi]\times[-2\,\pi,2\,\pi). \tag{67}$$

$$\mathbb{D}_{\mathrm{SU}(2),2}: \qquad (\phi,\theta,\psi)\in[-2\,\pi,2\,\pi)\times[0,\pi]\times[0,2\,\pi). \tag{68}$$

منظور از *تقریبَن* این است که که اگر $(\theta=0)$، مقدار ِ $(\phi-\psi)$ مهم نیست، و اگر $(\theta=\pi)$، مقدار ِ $(\phi+\psi)$ مهم نیست.

برا یِ $\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}$،

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi+4\,\pi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi). \tag{69}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,-\theta,\psi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi-\pi,\theta,\psi+\pi). \tag{70}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta+2\,\pi,\psi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi). \tag{71}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi+2\,\pi,\theta,\psi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi). \tag{72}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi+\chi,0,\psi-\chi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,0,\psi). \tag{73}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi+\chi,\pi,\psi+\chi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\pi,\psi). \tag{74}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi)=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi). \tag{75}$$

گستره ای از مقدارها یِ (ϕ,θ,ψ) که همه یِ اعضا یِ گروه ِ $\mathrm{SO}(3)$ را بدهد و عضو ِ تکراری ندهد را میشود *تقریبَن* $\mathbb{D}_{\mathrm{SO}(3)}$ گرفت:

$$\mathbb{D}_{\mathrm{SO}(3)}: \qquad (\phi,\theta,\psi)\in[0,2\,\pi)\times[0,\pi]\times[0,2\,\pi). \tag{76}$$

منظور از *تقریبَن* این است که که اگر $(\theta=0)$، مقدار ِ $(\phi-\psi)$ مهم نیست، و اگر $(\theta=\pi)$، مقدار ِ $(\phi+\psi)$ مهم نیست. با تعریف ِ

$$\mathfrak{C}[\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi)]:=\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}(\phi,\theta,\psi), \tag{77}$$

دیده میشود $\mathfrak{C}$ یک تناظر ِ 2 به 1 بین ِ $\mathrm{SU}(2)$ و $\mathrm{SO}(3)$ است:

$$\mathfrak{C}(-U)=\mathfrak{C}(U). \tag{78}$$

به این ترتیب، نگاشتها یی که دامنه یِشان $\mathrm{SU}(2)$ است را میشود نگاشتها یی با دامنه یِ $\mathbb{R}^3$ گرفت که مانسته‌ها یِ (60) تا (65) را، با نگاشت به جا یِ $\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}$، بر میآورند. نگاشتها یی که دامنه یِشان $\mathrm{SO}(3)$ است را هم میشود نگاشتها یی با دامنه یِ $\mathbb{R}^3$ گرفت که مانسته‌ها یِ (69) تا (75) را، با نگاشت به جا یِ $\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}$، بر میآورند. همچنین، نگاشتها یی که دامنه یِشان $\mathrm{SO}(3)$ است را میشود نگاشتها یی گرفت که دامنه یِشان $\mathrm{SU}(2)$ است و رابطه یِ (78) را، با نگاشت به جا یِ $\mathfrak{C}$، بر میآورند.

4 میدانها یِ ناوردا و پارامترها یِ اُیلِر

U را یک عضو ِ گروه ِ $\mathrm{SU}(2)$ نزدیک به همانی میگیرم:

$$U^\dagger\, U = \mathbf{1} + (U^\dagger - \mathbf{1}) + (U - \mathbf{1}) + o(U - \mathbf{1}). \tag{79}$$

$$\det U = 1 + \mathrm{tr}(U - \mathbf{1}) + o(U - \mathbf{1}). \tag{80}$$

به این ترتیب، $(U - \mathbf{1})$ تا مرتبه یِ اول یک ماتریس ِ پادِارمیتی با رد ِ صفر است. از اینجا،

$$U - \mathbf{1} = s^j\, \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\sigma_j\right) + o(s). \tag{81}$$

e را پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با مختصات ِ s میگیرم. به این ترتیب،

$$[\mathrm{fl}(s^j\, \mathfrak{l}_j)]\, \mathbf{1} = \mathbf{1} + s^j\, \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\sigma_j\right) + o(s). \tag{82}$$

$$[\mathrm{fl}(s^j\, \mathfrak{r}_j)]\, \mathbf{1} = \mathbf{1} + s^j\, \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\sigma_j\right) + o(s). \tag{83}$$

با

$$[\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi)]\, \left[\mathbf{1} + s^j\, \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\sigma_j\right)\right] + o(s) =: [\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi^{\mathfrak{L}},\theta^{\mathfrak{L}},\psi^{\mathfrak{L}})], \tag{84}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} s^j\, \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\sigma_j\right) + o(s) = {} & [-(\phi^{\mathfrak{L}} - \phi)\, \sin\theta\, \cos\psi + (\theta^{\mathfrak{L}} - \theta)\, \sin\psi]\, \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\sigma_1\right) \\ & + [(\phi^{\mathfrak{L}} - \phi)\, \sin\theta\, \sin\psi + (\theta^{\mathfrak{L}} - \theta)\, \cos\psi]\, \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\sigma_2\right) \\ & + [(\phi^{\mathfrak{L}} - \phi)\, \cos\theta + (\psi^{\mathfrak{L}} - \psi)]\, \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\sigma_3\right). \end{aligned} \tag{85}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\phi^{\mathfrak{L}} - \phi = -s^1\,\frac{\cos\psi}{\sin\theta} + s^2\,\frac{\sin\psi}{\sin\theta} + o(s). \tag{86}$$

$$\theta^{\mathfrak{L}} - \theta = s^1\,\sin\psi + s^2\,\cos\psi + o(s). \tag{87}$$

$$\psi^{\mathfrak{L}} - \psi = s^1\,\cos\psi\,\cot\theta - s^2\,\sin\psi\,\cot\theta + s^3 + o(s). \tag{88}$$

به این ترتیب از (50) دیده میشود

$$\mathfrak{l}_1 = -\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\,\mathfrak{b}_\phi + \sin\psi\,\mathfrak{b}_\theta + \cos\psi\,\cot\theta\,\mathfrak{b}_\psi. \tag{89}$$

$$\mathfrak{l}_2 = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\,\mathfrak{b}_\phi + \cos\psi\,\mathfrak{b}_\theta - \sin\psi\,\cot\theta\,\mathfrak{b}_\psi. \tag{90}$$

$$\mathfrak{l}_3 = \mathfrak{b}_\psi. \tag{91}$$

به هم ین ترتیب، با

$$\left[\mathbf{1} + s^j\,\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\sigma_j\right)\right]\,[\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi,\theta,\psi)] + o(s) =: [\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}(\phi^{\mathfrak{R}},\theta^{\mathfrak{R}},\psi^{\mathfrak{R}})], \tag{92}$$

دیده میشود

$$\phi^{\mathfrak{R}} - \phi = -s^1\,\cos\phi\,\cot\theta - s^2\,\sin\phi\,\cot\theta + o(s). \tag{93}$$

$$\theta^{\mathfrak{R}} - \theta = -s^1\,\sin\phi + s^2\,\cos\phi + o(s). \tag{94}$$

$$\psi^{\mathfrak{R}} - \psi = s^1\,\frac{\cos\phi}{\sin\theta} + s^2\,\frac{\sin\phi}{\sin\theta} + s^3 + o(s). \tag{95}$$

به این ترتیب از (51) دیده میشود

$$\mathfrak{r}_1 = -\cos\phi\,\cot\theta\,\mathfrak{b}_\phi - \sin\phi\,\mathfrak{b}_\theta + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\,\mathfrak{b}_\psi. \tag{96}$$

$$\mathfrak{r}_2 = -\sin\phi\,\cot\theta\,\mathfrak{b}_\phi + \cos\phi\,\mathfrak{b}_\theta + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\,\mathfrak{b}_\psi. \tag{97}$$

$$\mathfrak{r}_3 = \mathfrak{b}_\phi. \tag{98}$$

سرانجام، با استفاده از (45)، رابطه‌ها یِ (89) تا (91) و (96) تا (98) نتیجه میدهند

$$\mathrm{j}_1 = \left(-\frac{\cos\psi}{\sin\theta} + \cos\phi\,\cot\theta\right)\,\mathfrak{b}_\phi + (\sin\psi + \sin\phi)\,\mathfrak{b}_\theta + \left(\cos\psi\,\cot\theta - \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\right)\,\mathfrak{b}_\psi. \quad (99)$$

$$\mathrm{j}_2 = \left(\frac{\sin\psi}{\sin\theta} + \sin\phi\,\cot\theta\right)\,\mathfrak{b}_\phi + (\cos\psi - \cos\phi)\,\mathfrak{b}_\theta + \left(-\sin\psi\,\cot\theta - \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\right)\,\mathfrak{b}_\psi. \quad (100)$$

$$\mathrm{j}_3 = -\mathfrak{b}_\phi + \mathfrak{b}_\psi. \quad (101)$$

رابطه یِ (85)، از فقط (53) و جابه‌جاگرها یِ N_j ها با هم نتیجه میشود. با مقایسه یِ (54) با (53) دیده میشود $\mathrm{E}_{\mathrm{SO}(3)}$ هم ان $\mathrm{E}_{\mathrm{SU}(2)}$ است که در آن N_j به M_j تبدیل شده. جابه‌جاگرها یِ M_j ها با هم هم مثلِ جابه‌جاگرها یِ N_j ها با هم است:

$$[N_j, N_k] = \varepsilon^l{}_{j\,k}\,N_l. \quad (102)$$

$$[M_j, M_k] = \varepsilon^l{}_{j\,k}\,M_l. \quad (103)$$

از اینجا نتیجه میشود مانسته یِ (85) برا یِ SO(3)، هم ان (85) است. به این ترتیب نتیجه میشود مانسته یِ (89) تا (91) برا یِ SO(3) هم ان رابطه‌ها یِ (89) تا (91) است. به شکل ی مشابه دیده میشود این نتیجه برا یِ (96) تا (98)، و به این ترتیب برا یِ (99) تا (101)، هم درست است: شکلِ میدانها یِ برداری یِ چپ-ناوردا و راست-ناوردا و الحاقی یِ SO(3) بر حسبِ پارامترها یِ اُیلِر [4]، با شکلِ میدانها یِ برداری یِ متناظرِ SU(2) بر حسبِ هم ان پارامترها یکسان است. رُشن است که این نتیجه برا ی هر دُ گروه لی [2] که جبرِ لی [2] یِشان یکریخت باشد برقرار است.

البته این به معنی یِ آن نیست که میدانها یِ برداری یِ چپ-ناوردا و راست-ناوردا و الحاقی یِ SO(3) با مانسته‌ها یِشان برا یِ SU(2) برابر اند: دامنه یِ این میدانها برا یِ SO(3) و SU(2) یکسان نیستند.

5 میدانها یِ اسکالر

میدانها یِ اسکالر بر $\mathbb{S}_2$ را میشود بر حسب ِ هماهنگها یِ کروی بسط داد، که هماهنگها یِ کروی همزمان-ویژه‌بردارها یِ $(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J})$ و J_3 اند، که J_i مشتق ِ لی [2] با مولد ِ دَوَران حُل ِ محور ِ i است، و

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} := \delta^{j\,k}\,A_j\,B_k. \tag{104}$$

برا یِ SU(2) یا SO(3)، مشتق ِ لی [2] با $\mathfrak{l}_j$ و $\mathfrak{r}_j$ و $\mathfrak{j}_j$ را با به ترتیب L_j و R_j و J_j نشان میدهم. رُشن است که

$$[L_j, L_k] = \varepsilon^l{}_{j\,k}\,L_l. \tag{105}$$

$$[R_j, R_k] = -\varepsilon^l{}_{j\,k}\,R_l. \tag{106}$$

$$[L_j, R_k] = 0. \tag{107}$$

پس میشود دنبال ِ میدانها یِ اسکالر ی بود که همزمان ویژه‌بردار ِ $(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L})$ و $(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})$ و L_3 و R_3 باشند. اما $(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L})$ و $(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})$ با هم برابر اند. در واقع،

$$L_1 = -\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\,\partial_\phi + \sin\psi\,\partial_\theta + \cos\psi\,\cot\theta\,\partial_\psi. \tag{108}$$

$$L_2 = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\,\partial_\phi + \cos\psi\,\partial_\theta - \sin\psi\,\cot\theta\,\partial_\psi. \tag{109}$$

$$L_3 = \partial_\psi. \tag{110}$$

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L} = \frac{1}{\sin\theta}\,\partial_\theta\,\sin\theta\,\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\,[(\partial_\phi)^2 + (\partial_\psi)^2 - 2\,\cos\theta\,\partial_\phi\,\partial_\psi]. \tag{111}$$

$$R_1 = -\cos\phi\,\cot\theta\,\partial_\phi - \sin\phi\,\partial_\theta + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\,\partial_\psi. \tag{112}$$

$$R_2 = -\sin\phi\,\cot\theta\,\partial_\phi + \cos\phi\,\partial_\theta + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\,\partial_\psi. \tag{113}$$

$$R_3 = \partial_\phi. \tag{114}$$

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R} = \frac{1}{\sin\theta}\,\partial_\theta\,\sin\theta\,\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\,[(\partial_\phi)^2 + (\partial_\psi)^2 - 2\,\cos\theta\,\partial_\phi\,\partial_\psi]. \tag{115}$$

به این ترتیب، دنبال ِ میدانها یِ اسکالر ِ $\mathrm{Z}_{s\,l\,r}$ َم که

$$(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L})\,\mathrm{Z}_{s\,l\,r} = -s\,(s+1)\,\mathrm{Z}_{s\,l\,r}. \tag{116}$$

$$(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})\,\mathrm{Z}_{s\,l\,r} = -s\,(s+1)\,\mathrm{Z}_{s\,l\,r}. \tag{117}$$

$$L_3\,\mathrm{Z}_{s\,l\,r} = -\mathrm{i}\,l\,\mathrm{Z}_{s\,l\,r}. \tag{118}$$

$$R_3\,\mathrm{Z}_{s\,l\,r} = \mathrm{i}\,r\,\mathrm{Z}_{s\,l\,r}. \tag{119}$$

رُشن است که (117) هم ان (116) است. ضمنَن از این که جابه‌جاگرها یِ L_j ها با هم و جابه‌جاگرها یِ $(-R_j)$ ها با هم مثل ِ جابه‌جاگرها یِ مولدها یِ $\mathrm{SU}(2)$ با هم اند، دیده میشود

$$(2\,s) \in \mathbb{I}, \tag{120}$$

$$(l-s) \in \mathbb{I}, \qquad -s \le l \le s, \tag{121}$$

$$(r-s) \in \mathbb{I}, \qquad -s \le r \le s, \tag{122}$$

که $\mathbb{I}$ مجموعه یِ عددها یِ صحیح ِ نامنفی است. در یافتن ِ همزمان-ویژه‌بردارها یِ $(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J})$ و J_3، بالابر و پایینبر (به ترتیب J_+ و J_-) ابزارها یی مفید ند. اینجا هم عملگرها یی مشابه تعریف میکنم.

$$\begin{aligned} L_\pm &:= L_1 \pm \mathrm{i}\,L_2,\\ &= \exp(\mp\,\mathrm{i}\,\psi)\,\left(\pm\,\mathrm{i}\,\partial_\theta - \frac{1}{\sin\theta}\,\partial_\phi + \cot\theta\,\partial_\psi\right). \end{aligned} \tag{123}$$

$$\begin{aligned} R_\pm &:= R_1 \pm \mathrm{i}\,R_2,\\ &= \exp(\pm\,\mathrm{i}\,\phi)\,\left(\pm\,\mathrm{i}\,\partial_\theta - \cot\theta\,\partial_\phi + \frac{1}{\sin\theta}\,\partial_\psi\right). \end{aligned} \tag{124}$$

به هم ان روش ی که در ساختن ِ نمایشها یِ جبر ِ SU(2) به کار میرود، دیده میشود

$$L_-\,\mathrm{Z}_{s\,l\,r} \propto \mathrm{Z}_{s\,(l-1)\,r}. \tag{125}$$

$$R_-\,\mathrm{Z}_{s\,l\,r} \propto \mathrm{Z}_{s\,l\,(r-1)}. \tag{126}$$

$$L_+\,\mathrm{Z}_{s\,s\,s} = 0. \tag{127}$$

$$R_+\,\mathrm{Z}_{s\,s\,s} = 0. \tag{128}$$

$$L_3\,\mathrm{Z}_{s\,s\,s} = -\mathrm{i}\,s\,\mathrm{Z}_{s\,s\,s}. \tag{129}$$

$$R_3\,\mathrm{Z}_{s\,s\,s} = \mathrm{i}\,s\,\mathrm{Z}_{s\,s\,s}. \tag{130}$$

از (118) و (119) دیده میشود

$$\mathrm{Z}_{s\,l\,r} = \exp[\mathrm{i}\,(r\,\phi - l\,\psi)]\,\mathrm{Q}_{s\,l\,r}, \tag{131}$$

که $Q_{s\,l\,r}$ تابع ِ فقط θ است. تعریف میکنم

$$(L_\pm)_{l\,r} := \mathrm{i}\,\left(\pm\partial_\theta - \frac{r}{\sin\theta} - l\,\cot\theta\right). \tag{132}$$

$$(R_\pm)_{l\,r} := \mathrm{i}\,\left(\pm\partial_\theta - r\,\cot\theta - \frac{l}{\sin\theta}\right). \tag{133}$$

به این ترتیب رابطهها یِ (125) تا (130) به رابطهها یی برا یِ $\mathrm{Q}_{s\,l\,r}$ تبدیل میشوند:

$$(L_-)_{l\,r}\,\mathrm{Q}_{s\,l\,r} \propto \mathrm{Q}_{s\,(l-1)\,r}. \tag{134}$$

$$(R_-)_{l\,r}\,\mathrm{Q}_{s\,l\,r} \propto \mathrm{Q}_{s\,l\,(r-1)}. \tag{135}$$

$$(L_+)_{s\,s}\,\mathrm{Q}_{s\,s\,s} = 0. \tag{136}$$

$$(R_+)_{s\,s}\,\mathrm{Q}_{s\,s\,s} = 0. \tag{137}$$

دیده میشود (136) و (137) یکسان ند. هردُ میشوند

$$\left[\partial_\theta - s\,\left(\frac{1}{\sin\theta} + \cot\theta\right)\right]\,\mathrm{Q}_{s\,s\,s} = 0, \tag{138}$$

یا

$$\left(\partial_\theta - s\,\cot\frac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{Q}_{s\,s\,s} = 0, \tag{139}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathrm{Q}_{s\,s\,s} \propto \sin^{2\,s}\frac{\theta}{2}. \tag{140}$$

از (132) و (133) دیده میشود

$$\begin{aligned}(L_-)_{l\,r} &= -\mathrm{i}\,\left(\partial_\theta + \frac{l+r}{2}\,\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{l-r}{2}\,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right),\\ &= -\mathrm{i}\,\left(\partial_\theta + \frac{l+r}{2}\,\cot\frac{\theta}{2} - \frac{l-r}{2}\,\tan\frac{\theta}{2}\right).\end{aligned} \tag{141}$$

از این، و با محاسبه ای مشابه برا یِ $(R_-)_{l\,r}$، نتیجه میشود

$$(L_-)_{l\,r} = -\mathrm{i}\,\left(\sin^{l+r}\frac{\theta}{2}\,\cos^{l-r}\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\,\partial_\theta\,\left(\sin^{l+r}\frac{\theta}{2}\,\cos^{l-r}\frac{\theta}{2}\right). \tag{142}$$

$$(R_-)_{l\,r} = -\mathrm{i}\,\left(\sin^{r+l}\frac{\theta}{2}\,\cos^{r-l}\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\,\partial_\theta\,\left(\sin^{r+l}\frac{\theta}{2}\,\cos^{r-l}\frac{\theta}{2}\right). \tag{143}$$

تعریف میکنم

$$x := \cos\theta. \tag{144}$$

با استفاده از

$$\partial_x = -\left(2\,\sin\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\,\partial_\theta, \tag{145}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\,L_-)_{l\,r} &= -2\,\left(\sin^{l-1+r}\frac{\theta}{2}\,\cos^{l-1-r}\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\,\partial_x\,\left(\sin^{l+r}\frac{\theta}{2}\,\cos^{l-r}\frac{\theta}{2}\right),\\ &= -(1-x)^{-(l-1+r)}\,(1+x)^{-(l-1-r)}\,\partial_x\,(1-x)^{l+r}\,(1+x)^{l-r}.\end{aligned} \tag{146}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\,R_-)_{l\,r} &= -2\,\left(\sin^{r-1+l}\frac{\theta}{2}\,\cos^{r-1-l}\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\,\partial_x\,\left(\sin^{r+l}\frac{\theta}{2}\,\cos^{r-l}\frac{\theta}{2}\right),\\ &= -(1-x)^{-(r-1+l)}\,(1+x)^{-(r-1-l)}\,\partial_x\,(1-x)^{r+l}\,(1+x)^{r-l}.\end{aligned} \tag{147}$$

با تعریف ِ

$$[(L_-)^m]_{l\,r} := (L_-)_{(l-m+1)\,r}\cdots(L_-)_{l\,r}, \tag{148}$$

$$[(R_-)^m]_{l\,r} := (R_-)_{l\,(r-m+1)}\cdots(R_-)_{l\,r}, \tag{149}$$

دیده میشود

$$[(\mathrm{i}\,L_-)^m]_{l\,r} = (1-x)^{-(l-m+r)/2}\,(1+x)^{-(l-m-r)/2}$$
$$(-\partial_x)^m\,(1-x)^{(l+r)/2}\,(1+x)^{(l-r)/2}. \tag{150}$$
$$[(\mathrm{i}\,R_-)^m]_{l\,r} = (1-x)^{-(r-m+l)/2}\,(1+x)^{-(r-m-l)/2}$$
$$(-\partial_x)^m\,(1-x)^{(r+l)/2}\,(1+x)^{(r-l)/2}. \tag{151}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{Q}_{s\,s\,s} \propto (1-x)^s. \tag{152}$$
$$\mathrm{Q}_{s\,l\,r} \propto [(\mathrm{i}\,R_-)^{s-r}]_{l\,s}\,[(\mathrm{i}\,L_-)^{l-s}]_{s\,s}\,Q_{s\,s\,s},$$
$$\propto [(\mathrm{i}\,R_-)^{s-r}]_{l\,s}\,[(\mathrm{i}\,L_-)^{s-l}]_{s\,s}\,(1-x)^s. \tag{153}$$

نتیجه میشود

$$\mathrm{Q}_{s\,l\,r} \propto (1-x)^{-(r+l)/2}\,(1+x)^{-(r-l)/2}\,(-\partial_x)^{s-r}\,(1+x)^{s-l}$$
$$(-\partial_x)^{s-l}\,(1-x)^{2\,s},$$
$$\propto (1-x)^{-(r+l)/2}\,(1+x)^{-(r-l)/2}\,(-\partial_x)^{s-r}\,(1+x)^{s-l}\,(1-x)^{s+l}. \tag{154}$$

از جمله دیده میشود

$$\mathrm{Q}_{s\,l\,s} \propto (1-x)^{(s+l)/2}\,(1+x)^{(s-l)/2}. \tag{155}$$
$$\mathrm{Q}_{s\,s\,r} \propto (1-x)^{(s+r)/2}\,(1+x)^{(s-r)/2}. \tag{156}$$

در واقع از

$$(R_\pm)_{l\,r} = (L_\pm)_{r\,l}, \tag{157}$$

نتیجه میشود

$$\mathrm{Q}_{s\,r\,l} = \mathrm{Q}_{s\,l\,r}. \tag{158}$$

سرانجام، از

$$
\begin{aligned}
(-\partial_x)^{s-r}\,(1+x)^{s-l}\,(1-x)^{s+l} = {} & \sum_{k=0}^{s-r}\binom{s-r}{k}(-1)^k\,[(-\partial_x)^{s-r-k}\,(1-x)^{s+l}] \\
& [(\partial_x)^k\,(1+x)^{s-l}], \\
= {} & \sum_{k=0}^{s-r}(-1)^k\binom{s-r}{k}\frac{(s+l)!}{(l+r+k)!}\,\frac{(s-l)!}{(s-l-k)!} \\
& (1-x)^{l+r+k}\,(1+x)^{s-l-k}, \qquad (159)
\end{aligned}
$$

نتیجه میشود

$$
\mathrm{Q}_{s\,l\,r}\propto\sum_{k=0}^{s-r}\frac{(-1)^k\,(1-x)^{[(l+r)/2]+k}\,(1+x)^{s-[(l+r)/2]-k}}{k!\,(l+r+k)!\,(s-l-k)!\,(s-r-k)!}. \qquad (160)
$$

چون Q تا حد ِ یک ثابت ِ ضربی حساب شده، ضریبها یی در طرف ِ راست ِ (159) که به k بسته‌گی نداشته اند حذف شده اند. به خاطر ِ حد ِ بالا یِ جمع، به نظر میرسد طرف ِ راست ِ (160) نسبت به جابه‌جاکردن ِ l و r متقارن نیست. اما دیده میشود اگر $r > l$، جمله‌ها یِ با $(s-l) < k$ صفر ند، چون شامل ِ فاکتُریل ِ یک عدد ِ صحیح ِ منفی در مخرج ند. به این ترتیب، میشود (160) را به شکل یِ صریحاَ متقارن نسبت به l و r نوشت:

$$
\mathrm{Q}_{s\,l\,r}\propto\sum_{k=0}^{s-\max(l,r)}\frac{(-1)^k\,(1-x)^{[(l+r)/2]+k}\,(1+x)^{s-[(l+r)/2]-k}}{k!\,(l+r+k)!\,(s-l-k)!\,(s-r-k)!}. \qquad (161)
$$

میشود حدها یِ جمعبندی را ننوشت: اگر k در گستره یِ $[\max[0,-(l+r)]$ تا $[s-\max(l,r)]$ نباشد، فاکتُریل ِ یک عدد ِ منفی در مخرج ظاهر میشود و کسر صفر میشود. به این ترتیب،

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Q}_{s\,l\,r} & \propto\sum_k\frac{(-1)^k\,(1-x)^{[(l+r)/2]+k}\,(1+x)^{s-[(l+r)/2]-k}}{k!\,(l+r+k)!\,(s-l-k)!\,(s-r-k)!}, \\
& \propto\sum_k\frac{(-1)^k}{k!\,(l+r+k)!\,(s-l-k)!\,(s-r-k)!} \\
& \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l+r+2\,k}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\,s-(l+r)-2\,k}. \qquad (162)
\end{aligned}
$$

همچنین،

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}_{s\,l\,r} &\propto \exp[\mathrm{i}\,(r\,\phi - l\,\psi)]\,\sum_k \frac{(-1)^k\,(1-x)^{[(l+r)/2]+k}\,(1+x)^{s-[(l+r)/2]-k}}{k!\,(l+r+k)!\,(s-l-k)!\,(s-r-k)!},\\
&\propto \exp[\mathrm{i}\,(r\,\phi - l\,\psi)]\,\sum_k \frac{(-1)^k}{k!\,(l+r+k)!\,(s-l-k)!\,(s-r-k)!}\\
&\quad \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l+r+2\,k}\,\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\,s-(l+r)-2\,k}.
\end{aligned} \tag{163}$$

با استفاده از (120) تا (122) دیده میشود مانسته‌ها یِ (60) تا (65) برا یِ $\mathrm{Z}_{s\,l\,r}$ برقرار اند.

همچنین، دیده میشود

$$\mathrm{Z}_{s\,l\,r}(\phi,\theta,\psi+2\,\pi) = (-1)^{2\,s}\,Z_{s\,l\,r}(\phi,\theta,\psi). \tag{164}$$

به این ترتیب معلوم میشود همزمان-ویژه‌بردارها یِ $(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})$ و L_3 و R_3 برا یِ SU(2) هم ان $\mathrm{Z}_{s\,l\,r}$ ها یند، که s و l و r شرطها یِ (120) تا (122) را بر میاورند. همزمان-ویژه‌بردارها یِ $(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})$ و L_3 و R_3 برا یِ SO(3) هم $\mathrm{Z}_{s\,l\,r}$ ها یند، که s و l و r شرطها یِ (120) تا (122) را بر میاورند، اما علاوه بر آن مقدار ِ s ِشان هم صحیح است. یعنی به جا یِ (120)،

$$s \in \mathbb{I}. \tag{165}$$

6 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «خمینه یِ گروهها یِ SU(2) و SO(3)» (2013/08/31) X1-094

[2] Lie

[3] Theodore Frankel; “the geometry of physics, an introduction” (Cambridge University Press, 1997)

[4] Euler

[5] Pauli

[6] Levi-Civita