X1-097 (2014/01/31)

چگالی یِ دُقطبی

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

رابطه یِ چگالی یِ دُقطبی یِ الکتریکی با چگالی یِ بار، و چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی با چگالی یِ جریان بررسی میشود.

0 درامد

در خیل ی از منابع، چگالی یِ دُقطبی یِ الکتریکی به شکل ِ یک رابطه یِ نقطه‌ای بر حسب ِ چگالی یِ بار داده میشود. اما دُقطبی یِ مغناطیسی (نَ چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی) به شکل ِ یک رابطه یِ انتگرالی بر حسب ِ چگالی یِ جریان داده میشود. بر عکس، این چگالی یِ جریان است که به شکل ِ یک رابطه یِ نقطه‌ای بر حسب ِ مشتق ِ چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی داده میشود. اینجا هدف بررسی یِ رابطه یِ این چگالی-یِ-دُقطبیها با چشمه‌ها یشان است.

همه یِ رابطه‌ها یی که به شکل ِ مئلفه ای نوشته شده اند، در پایه یِ دکَرتی اند. البته رُشن است که نتایج ِ حاصل از آنها وقت ی به شکل ِ تانسُری بیان شوند مستقل از پایه اند، یعنی استفاده از پایه یِ دکَرتی از کلیت ِ نتایج نمیکاهد.

همه چیز برا یِ بُعد ِ دلبخاه (و بزرگتر از یک، در مُرد ِ دُقطبی یِ مغناطیسی) است. به هم ین خاطر

ضربِ خارجی به کار نرفته و به جا یِ آن از تانسُرها یِ پادمتقارن استفاده شده.

1 دُقطبی یِ الکتریکی

رابطه یِ چگالی یِ چندقطبیها یِ الکتریکی با چگالی یِ بارِ الکتریکی خطی و نقطه‌ای است. از جمله برا یِ دُقطبی یِ الکتریکی،

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

که $\boldsymbol{P}$ چگالی یِ دُقطبی یِ الکتریکی، ρ چگالی یِ بار، و $\boldsymbol{r}$ بردارِ مکان است. از این رابطه نتیجه میشود

$$\boldsymbol{p} = \int \mathrm{d}V\,\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r}), \tag{2}$$

که $\boldsymbol{p}$ دُقطبی یِ الکتریکی یِ کل است. بر عکس، میشود رابطه یِ (2) را برا یِ رسیدن به (1) به کار برد. تعریف میکنم

$$\boldsymbol{p}(\mathbb{V}) := \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}V\,\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r}), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) := \lim_{[\mathbb{V}(\boldsymbol{r})]\to 0} \frac{\boldsymbol{p}[\mathbb{V}(\boldsymbol{r})]}{V[\mathbb{V}(\boldsymbol{r})]}, \tag{4}$$

که $[\mathbb{V}(\boldsymbol{r})]$ ناحیه ای شاملِ $\boldsymbol{r}$ است، $[V(\mathbb{V})]$ حجمِ ناحیه یِ $\mathbb{V}$ است، و $0 \to [\mathbb{V}(\boldsymbol{r})]$ به معنی یِ آن است که همه یِ ابعادِ $[\mathbb{V}(\boldsymbol{r})]$ به صفر میگراید، یعنی قطرِ $[\mathbb{V}(\boldsymbol{r})]$ به صفر میگراید، نَ این که فقط حجمِ $[\mathbb{V}(\boldsymbol{r})]$ به صفر بگراید. $[\boldsymbol{p}(\mathbb{V})]$ دُقطبی یِ الکتریکی یِ تُزیع ی است که چگالی یِ متناظر با آن درونِ $\mathbb{V}$ هم ان ρ، و بیرونِ $\mathbb{V}$ صفر است، یعنی $[\boldsymbol{p}(\mathbb{V})]$ دُقطبی یِ الکتریکی یِ متناظر با چگالی یِ $\rho_{\mathbb{V}}$ است، که

$$\rho_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \rho(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r} \in \mathbb{V} \\ 0, & \boldsymbol{r} \notin \mathbb{V} \end{cases}, \tag{5}$$

یا بسته‌تر

$$\rho_{\mathbb{V}} = \rho\,\Theta_{\mathbb{V}}, \tag{6}$$

که $\Theta_{\mathbb{V}}$ تابع ِ مشخصه یِ ناحیه یِ $\mathbb{V}$ است:

$$\Theta_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{r} \in \mathbb{V} \\ 0, & \boldsymbol{r} \notin \mathbb{V} \end{cases}. \tag{7}$$

از پیوسته‌گی یِ جریان،

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} + \dot{\rho} = 0, \tag{8}$$

که $\boldsymbol{J}$ چگالی یِ جریان، و $\dot{X}$ مشتق ِ X نسبت به t (زمان) است، دیده می‌شود اگر جریان ی نباشد، بار ِ هر ناحیه ای مستقل از زمان است. در این حالت این که چگالی یِ بار بیرون ِ یک ناحیه صفر شود بی آن که چگالی یِ بار درون ِ آن ناحیه دست بخُرَد علی‌الاصول شدنی است: هیچ پایسته‌گی یی به هم نمی‌ریزد. پس دست‌-ِ-کم برا یِ چنین حالت ی چگالی یِ دُقطبی یِ الکتریکی مشاهده‌پذیر است.

یک حالت ِ خاص هست که در آن رابطه یِ چگالی یِ بار با چگالی یِ دُقطبی یِ الکتریکی دُسویی است. یعنی نَ تنها از رو یِ چگالی یِ بار می‌شود چگالی یِ دُقطبی یِ الکتریکی را حساب کرد، بل که از رو یِ چگالی یِ دُقطبی یِ الکتریکی هم می‌شود چگالی یِ بار را حساب کرد. این حالت ی است که بار ِ هر ناحیه ای صفر است. یک تُزیع ِ نابدیهی متناظر با چنین حالت ی را نمی‌شود با فقط یک چگالی یِ حجمی نشان داد علت این است که اگر انتگرال ِ چگالی یِ حجمی یِ بار بر همه یِ ناحیه‌ها صفر شود، آنگاه خُد ِ چگالی یِ حجمی یِ بار صفر می‌شود. پس بار ِ هر ناحیه یِ $\mathbb{V}$ را ناشی از دُ بخش می‌گیرم، یک بخش به خاطر ِ $\partial\,\mathbb{V}$ (مرز ِ $\mathbb{V}$) و یک بخش به خاطر ِ درون ِ $\mathbb{V}$. این یعنی

$$Q(\mathbb{V}) = Q_{\mathrm{s}}(\mathbb{V}) + Q_{\mathrm{b}}(\partial\,\mathbb{V}), \tag{9}$$

که $Q_{\mathrm{s}}(\partial\,\mathbb{V})$ بار ِ ناشی از مرز ِ $\mathbb{V}$، و $Q_{\mathrm{b}}(\mathbb{V})$ بار ِ ناشی از درون ِ $\mathbb{V}$ است.

$\mathbb{V}$ را یک چندوجهی یِ کوچک می‌گیرم، که بردار ِ مساحت ِ وجه ِ i َش $\boldsymbol{S}_i$ (عمود بر وجه به سو یِ بیرون ِ $\mathbb{V}$) است. رُشن است که

$$\sum_i \boldsymbol{S}_i = 0. \tag{10}$$

وقت ی $\mathbb{V}$ به صفر می‌گراید، $Q_{\mathrm{b}}(\mathbb{V})$ مثل ِ $V(\mathbb{V})$ یا سریع‌تر به صفر می‌گراید، که $V(\mathbb{V})$ حجم ِ $\mathbb{V}$ است. پس اگر بنا باشد که $Q(\mathbb{V})$ صفر باشد، بخش ی از $Q_{\mathrm{s}}(\partial\,\mathbb{V})$ که متناسب با توان ِ اول ِ مساحت ِ

$\partial\,\mathbb{V}$ است باید صفر باشد:

$$\sum_i Q_{\rm s}(\boldsymbol{S}_i) = o[S(\partial\,\mathbb{V})], \tag{11}$$

که $S(\mathbb{S})$ مساحت ِ $\mathbb{S}$ است، و به جا یِ وجه ِ i به عنوان ِ متغیر ِ $Q_{\rm s}$ بردار ِ مساحت ِ وجه ِ i به کار رفته. این که اگر مجموع ِ چند بردار صفر باشد مجموع ِ اثر ِ $Q_{\rm s}$ (در مرتبه یِ غالب) بر آن بردارها هم صفر است، همراه با فرض ِ پیوسته‌گی یِ $Q_{\rm s}$ نتیجه می‌دهد $Q_{\rm s}$ تا مرتبه یِ غالب نسبت به بردار ِ مساحت خطی است، یعنی یک بردار ِ $\boldsymbol{\varpi}$ هست که

$$Q_{\rm s}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{\varpi}\cdot\boldsymbol{S} + o(S). \tag{12}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} Q_{\rm s}(\partial\,\mathbb{V}) &= \oint_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{r}),\\ &= \oint_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{r}), \end{aligned} \tag{13}$$

که $\boldsymbol{n}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر سطح به سو یِ بیرون است. از این، همراه با این شرط که $Q(\mathbb{V})$ صفر باشد نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} Q_{\rm b}(\partial\,\mathbb{V}) &= -\oint_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{r}),\\ &= -\int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\,V\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varpi})(\boldsymbol{r}). \end{aligned} \tag{14}$$

از (13) و (14) نتیجه می‌شود بار ِ متناظر با $\mathbb{V}$ را می‌شود با یک چگالی یِ سطحی یِ بار و یک چگالی یِ حجمی یِ بار ساخت:

$$\sigma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{r}). \tag{15}$$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = -(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varpi})(\boldsymbol{r}). \tag{16}$$

σ چگالی یِ سطحی و ρ چگالی یِ حجمی است. نکته این که σ نَ تنها به مکان بسته‌گی دارد، بل که به جهت ِ سطح هم بسته‌گی دارد.

در این حالت برا یِ دُقطبی یِ الکتریکی نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(\mathbb{V}) &= \int_{\partial\,\mathbb{V}}[\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{r})]\,\boldsymbol{r} - \int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}\,V\,[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varpi})(\boldsymbol{r})]\,\boldsymbol{r},\\ &= \int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}\,V\,\Big([(\boldsymbol{\nabla}\cdot\varpi)(\boldsymbol{r})]\,\boldsymbol{r} + [\boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{r})]\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{r} - \int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}\,V\,[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varpi})(\boldsymbol{r})]\,\boldsymbol{r},\\ &= \int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}\,V\,\boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{r}),\end{aligned} \tag{17}$$

که نتیجه میدهد $\boldsymbol{\varpi}$ هم ان چگالی یِ دُقطبی یِ الکتریکی است:

$$\boldsymbol{\varpi} = \boldsymbol{P}. \tag{18}$$

یک راه برا یِ ساختن ِ تُزیع ی که بار ِ کل َش بر هر حجم صفر باشد این است که یک تُزیع ِ دلبخاه با چگالی یِ ρ_0، با بردار ی (احتمالَن وابسته به مکان) انتقال داده شود. متناظر با میدان ِ برداری یِ $\boldsymbol{a}$، انتقال به اندازه یِ $\boldsymbol{a}$ را با $\mathrm{T}_{\boldsymbol{a}}$ نشان میدهم:

$$\mathrm{T}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{r}) := \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}). \tag{19}$$

انتقال-یافته یِ ρ_0 با $\boldsymbol{a}$ میشود $(\mathrm{T}_{\boldsymbol{a}})_*\,\rho_0$ ، که

$$\{[(\mathrm{T}_{\boldsymbol{a}})_*\,\rho_0][\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})]\}\,\left|\det\left[\frac{\partial\,(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a})}{\partial\,\boldsymbol{r}}\right]\right| = \rho_0(\boldsymbol{r}). \tag{20}$$

متناظر با میدان ِ برداری یِ $\boldsymbol{b}$ تعریف میکنم

$$Q(s,\mathbb{V}) := \frac{1}{s}\,\left[\int_{\mathrm{T}_{s\,\boldsymbol{b}}(\mathbb{V})}\mathrm{d}\,V\,\{[(\mathrm{T}_{s\,\boldsymbol{b}})_*\,\rho_0](\boldsymbol{r}) - \int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}\,V\,\rho_0(\boldsymbol{r})\right]. \tag{21}$$

از (20) دیده میشود

$$\begin{aligned}\rho_0(\boldsymbol{r}) &= [(\mathrm{T}_{s\,\boldsymbol{b}})_*\,\rho_0](\boldsymbol{r})\\ &\quad + s\,\{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,[(\mathrm{T}_{s\,\boldsymbol{b}})_*\,\rho_0]\}(\boldsymbol{r}) + s\,\{[(\mathrm{T}_{s\,\boldsymbol{b}})_*\,\rho_0]\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})\}(\boldsymbol{r})) + o(s),\end{aligned} \tag{22}$$

یا

$$\begin{aligned}[(\mathrm{T}_{s\,\boldsymbol{b}})_*\,\rho_0](\boldsymbol{r}) &= \rho_0(\boldsymbol{r}) - s\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\rho_0)(\boldsymbol{r}) - s\,[\rho_0\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})](\boldsymbol{r})) + o(s),\\ &= \rho_0(\boldsymbol{r}) - s\,[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{b}\,\rho_0)](\boldsymbol{r}).\end{aligned} \tag{23}$$

به این ترتیب، با نمادگذاری یِ

$$Q(0,\mathbb{V}) = \lim_{s\to 0}[Q(s,\mathbb{V})], \tag{24}$$

دیده میشود

$$Q(0,\mathbb{V}) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left\{\left[\int_{\mathrm{T}_{s\,\boldsymbol{b}}(\mathbb{V})} - \int_{\mathbb{V}}\right]\mathrm{d}\,V\,\rho_0(\boldsymbol{r})\right\} - \int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}\,V\,[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{b}\,\rho_0)](\boldsymbol{r}),$$

$$= \oint_{\partial\,\mathbb{V}}\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{b}\,\rho_0)(\boldsymbol{r}) - \int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}\,V\,[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{b}\,\rho_0)](\boldsymbol{r}). \tag{25}$$

دیده میشود این هم ان رابطه‌ها یِ (13) و (14) است، با

$$\boldsymbol{\varpi} = \boldsymbol{b}\,\rho_0. \tag{26}$$

2 دُقطبی یِ مغناطیسی

چگالی-یِ-جریان ُ متناظر با یک تُزیع ِ ایستا حالت ِ خاص ِ رابطه یِ پیوسته‌گی یِ (8) را برمیآورَد:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = 0. \tag{27}$$

برا یِ تعریف ِ چگالی یِ دُقطبی یِ الکتریکی میشود دُقطبی یِ الکتریکی یِ یک ناحیه یِ $\mathbb{V}$ را بر حجم ِ آن ناحیه تقسیم کرد. خارج- ِ-قسمت در حد ِ $\mathbb{V}$ به صفر چگالی یِ دُقطبی یِ الکتریکی میشود. برا یِ محاسبه یِ دُقطبی یِ الکتریکی یِ ناحیه یِ $\mathbb{V}$ هم میشود به جا یِ چگالی-یِ-بار ِ ρ چگالی-یِ-بار ِ $\rho_{\mathbb{V}}$ را به کار بُرد، که با (6) به ρ مربوط میشود. اگر برا یِ دُقطبی یِ مغناطیسی هم هم ین کار را بکنم، یعنی از رو یِ چگالی-یِ-جریان ِ $\boldsymbol{J}$ چگالی-یِ-جریان ِ $\boldsymbol{J}_{\mathbb{V}}$ را تعریف کنم که

$$\boldsymbol{J}_{\mathbb{V}} = \boldsymbol{J}\,\Theta_{\mathbb{V}}, \tag{28}$$

مشکل ی پیش میآید، این که در حالت ِ کلی $\boldsymbol{J}_{\mathbb{V}}$ چگالی-یِ-جریان ِ هیچ تُزیع ِ ایستا یی نیست، چون دیورژانس ِ $\boldsymbol{J}_{\mathbb{V}}$ صفر نیست:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}_{\mathbb{V}} = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J})\,\Theta_{\mathbb{V}} + \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\Theta_{\mathbb{V}}. \tag{29}$$

متناظر با تابع ِ ϕ،

$$\int\mathrm{d}\,V\,[(\boldsymbol{\nabla}\,\Theta_{\mathbb{V}})(\boldsymbol{r})]\,\phi(\boldsymbol{r}) = -\int\mathrm{d}\,V\,[\Theta_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r})]\,(\boldsymbol{\nabla}\,\phi)(\boldsymbol{r}),$$

$$= -\int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}\,V\,(\boldsymbol{\nabla}\,\phi)(\boldsymbol{r}),$$

$$= -\oint_{\partial\,\mathbb{V}}\mathrm{d}S\,(\boldsymbol{n}\,\phi)(\boldsymbol{r}). \tag{30}$$

$\delta_{\mathbb{S}}$ (چگالی یِ مساحت برا یِ $\mathbb{S}$) را چنین تعریف می‌کنم.

$$\int \mathrm{d}\,V\,\delta_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{r})\,X(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\,S\,X(\boldsymbol{r}). \tag{31}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\nabla}\,\Theta_{\mathbb{V}} = -\boldsymbol{n}\,\delta_{\partial\,\mathbb{V}}. \tag{32}$$

از این و (27) و (29) نتیجه می‌شود

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}_{\mathbb{V}} = -\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\,\delta_{\partial\,\mathbb{V}}, \tag{33}$$

پس بر خلافِ آن چه برا یِ چگالی یِ بار انجام شد، چگالی یِ جریان بیرونِ یک ناحیه را نمی‌شود به ساده‌گی دور ریخت: در حالتِ کلی چگالی-یِ-جریان بُریده رابطه یِ پیوسته‌گی را بر نمی‌آورَد.

برا یِ حلِ مشکل، جز این که جریانِ بیرونِ $\mathbb{V}$ را دور می‌ریزم یک جریان هم در مرزِ $\mathbb{V}$ اضافه می‌کنم:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{J}}_{\mathbb{V}} &= \boldsymbol{J}_{\mathbb{V}} + \boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}\,\delta_{\partial\,\mathbb{V}},\\ &= \boldsymbol{J}\,\Theta_{\mathbb{V}} + \boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}\,\delta_{\partial\,\mathbb{V}}.\end{aligned} \tag{34}$$

$\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}$ چگالی یِ یک جریانِ سطحی ست، و بنا ست چنان تعیین شود که دیورژانسِ $\tilde{\boldsymbol{J}}_{\mathbb{V}}$ صفر شود.

بر $\partial\,\mathbb{V}$ تعریف می‌کنم

$$\boldsymbol{D} := \boldsymbol{\nabla} - \boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}). \tag{35}$$

$\boldsymbol{D}$ مشتق‌گیری مماس بر $\partial\,\mathbb{V}$ است، و رُشن است که

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D} = 0. \tag{36}$$

متناظر با تابع ِ X،

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\,V\,[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}\,\delta_{\partial\,\mathbb{V}})](\boldsymbol{r})\,X(\boldsymbol{r}) &= -\int \mathrm{d}\,V\,[(\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}\,\delta_{\partial\,\mathbb{V}})(\boldsymbol{r})]\cdot(\boldsymbol{\nabla}\,X)(\boldsymbol{r})\\
&= -\int_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,(\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,X)(\boldsymbol{r}),\\
&= -\int_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,\{[\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}-\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}})]\cdot\boldsymbol{\nabla}\,X\}(\boldsymbol{r})\\
&\quad -\int_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}})\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,X)](\boldsymbol{r}),\\
&= -\int_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,\{[\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}-\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}})]\cdot\boldsymbol{D}\,X\}(\boldsymbol{r})\\
&\quad -\int_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}})\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,X)](\boldsymbol{r}).
\end{aligned}\tag{37}$$

از این که $\partial\,\mathbb{V}$ مرز ندارد، نتیجه میشود متناظر با میدان ِ برداری یِ $\boldsymbol{F}$ که بر $\partial\,\mathbb{V}$ تعریف شده و در هر نقطه بر $\partial\,\mathbb{V}$ مماس است،

$$\int_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F})(\boldsymbol{r}) = 0.\tag{38}$$

به این ترتیب، با تعریف ِ

$$\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}^{\parallel} := \boldsymbol{K}_{\mathbb{V}} - \boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}),\tag{39}$$

دیده میشود

$$\int_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,(\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}^{\parallel}\cdot\boldsymbol{D}\,X)(\boldsymbol{r}) = -\int_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,[(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}^{\parallel})\,X](\boldsymbol{r}),\tag{40}$$

و از آنجا،

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\,V\,[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}\,\delta_{\partial\,\mathbb{V}})](\boldsymbol{r})\,X(\boldsymbol{r}) &= \int_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,[(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}^{\parallel})\,X](\boldsymbol{r})\\
&\quad -\int_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}})\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,X)](\boldsymbol{r}).\end{aligned}\tag{41}$$

از این و (33) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\,V\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{J}}_{\mathbb{V}})(\boldsymbol{r})\,X(\boldsymbol{r}) &= \int_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,[(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}^{\parallel}-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r})]\,[X(\boldsymbol{r})]\\
&\quad -\int_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}})(\boldsymbol{r})]\,[(\nabla_{\perp}\,X)(\boldsymbol{r})].\end{aligned}\tag{42}$$

بر هر رویه، مقدارها یِ X و $\nabla_\perp X$ مستقل از هم ند. پس شرط ِ صفرشدن ِ طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا به ازا یِ X یِ دلبخاه (که هم ان صفرشدن ِ دیورژانس ِ $\tilde{\boldsymbol{J}}_{\mathbb{V}}$ است) این است که دُجمله یِ طرف ِ راست تکتک به ازا یِ X ِ دلبخاه صفر شوند:

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}=0. \tag{43}$$

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}^{\parallel}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}. \tag{44}$$

با استفاده از (43)، رابطه یِ (44) میشود

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}. \tag{45}$$

$\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}$ متناظر با جریان ی مماس بر $\partial\,\mathbb{V}$ است، که مدار ِ جریان ی که از $\partial\,\mathbb{V}$ بیرون میرود را میبندد.

از (27)، رابطه یِ پیوسته‌گی برا یِ $\boldsymbol{J}$، همراه با فرض ِ جایگزیده- بودن ِ $\boldsymbol{J}$، نتیجه میشود انتگرال ِ $\boldsymbol{J}$ بر کل ِ فضا صفر است، مثلَن فصل ِ 5 از [1]. برا یِ دیدن ِ این، انتگرال ِ $\boldsymbol{J}$ را بر ناحیه یِ $\mathbb{W}$ حساب میکنم.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{W}}\mathrm{d}V\,J^j(\boldsymbol{r})&=\int_{\mathbb{W}}\mathrm{d}V\,\delta_i^j\,J^i(\boldsymbol{r}),\\&=\int_{\mathbb{W}}\mathrm{d}V\,(\nabla_i\,r^j)\,J^i(\boldsymbol{r}),\\&=\oint_{\partial\,\mathbb{W}}\mathrm{d}S\,r^j\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})-\int_{\mathbb{W}}\mathrm{d}V\,r^j\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r}),\end{aligned} \tag{46}$$

جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست به خاطر ِ (27) صفر است. جمله یِ اول ِ طرف ِ راست، اگر $\mathbb{W}$ به کل ِ فضا بگراید و $\boldsymbol{J}$ با سرعت ِ کافی صفر شود ($\boldsymbol{J}$ جایگزیده باشد) صفر میشود. به این ترتیب،

$$\int\mathrm{d}V\,\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})=0. \tag{47}$$

$\boldsymbol{V}_{\mathbb{V}}$ هم شرط ِ پیوسته‌گی را بر میآورَد و جایگزیده است. پس

$$\int\mathrm{d}V\,\boldsymbol{J}_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r})=0. \tag{48}$$

به این ترتیب،

$$\int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}V\,\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})+\oint_{\partial\,\mathbb{V}}\mathrm{d}S\,\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r})=0. \tag{49}$$

با استدلال ی مشابه با آن چه برا یِ رسیدن به (12) به کار رفت، معلوم میشود انتگرال ِ چگالی یِ جریان ِ سطحی بر یک سطح ِ کوچک، تا مرتبه یِ یک نسبت به آن سطح یک تابع ِ خطی از بردار ِ مساحت

است. به این ترتیب، یک تانسُر ِ $\mathcal{M}$ (از رتبه یِ 2) هست که

$$K_{\mathbb{V}}^{j} = n_i\, \mathcal{M}^{i\,j}. \tag{50}$$

$\mathcal{M}$ به فقط مکان بسته‌گی دارد، تابع ِ $\boldsymbol{n}$ نیست. از (43) نتیجه میشود

$$n_i\, n_j\, \mathcal{M}^{i\,j} = 0. \tag{51}$$

این رابطه به ازا یِ همه یِ بردارها یِ یکه یِ $\boldsymbol{n}$ برقرار است، و $\mathcal{M}$ مستقل از $\boldsymbol{n}$ است. از اینها نتیجه میشود $\mathcal{M}$ پادمتقارن است:

$$\mathcal{M}^{j\,i} = -\mathcal{M}^{i\,j}. \tag{52}$$

با استفاده از (50)، رابطه یِ (49) میشود

$$\int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}V\, [J^{j}(\boldsymbol{r}) + (\nabla_i\, \mathcal{M}^{i\,j})(\boldsymbol{r})] = 0. \tag{53}$$

این رابطه برا یِ هر ناحیه یِ $\mathbb{V}$ درست است. پس انتگرالده صفر است:

$$\begin{aligned} J^{j} &= -\nabla_i\, \mathcal{M}^{i\,j},\\ &= \nabla_i\, \mathcal{M}^{j\,i}. \end{aligned} \tag{54}$$

با $\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}$ به شکل ِ (50)، با یک $\mathcal{M}$ ِ پادمتقارن، (43) براورده میشود. برا یِ (45) هم،

$$\begin{aligned} D_j\, K_{\mathbb{V}}^{j} &= D_j\, (n_i\, \mathcal{M}^{i\,j}),\\ &= (D_j\, n_i)\, \mathcal{M}^{i\,j} + n_i\, D_j\, \mathcal{M}^{i\,j}. \end{aligned} \tag{55}$$

مشتق ِ بردار ِ یکه یِ عمود بر $\partial\,\mathbb{V}$ خمش ِ عارضی یِ $\partial\,\mathbb{V}$ است:

$$D_j\, n_i = E_{i\,j}, \tag{56}$$

که E خمش ِ عارضی یِ $\partial\,\mathbb{V}$ ست، که متقارن است، مثلَن فصل ِ 5 از [2]. به این ترتیب، از پادتقارن ِ $\mathcal{M}$ نتیجه میشود

$$(D_j\, n_i)\, \mathcal{M}^{i\,j} = 0. \tag{57}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} n_i\, D_j\, \mathcal{M}^{i\,j} &= n_i\, \nabla_j\, \mathcal{M}^{i\,j},\\ &= n_i\, J^{j}, \end{aligned} \tag{58}$$

که در برابری یِ اول (51)، و در برابری یِ دوم (54) به کار رفته. به این ترتیب (55) میشود

$$D_j\, K^j_{\mathbb{V}} = n_i\, J^j, \tag{59}$$

که هم ان (45) است.

به این ترتیب متناظر با هر تانسُر ِ پادمتقارن ِ $\mathcal{M}$ از رتبه یِ 2، که (54) را براورَد، یک جریان ِ سطحی به شکل ِ (50) هست که (43) و (45) را بر میآورَد، یعنی جریان ی که از $\partial\,\mathbb{V}$ بیرون میرود را میبندد. بر عکس هر جریان ِ سطحی یی که جریان بیرون-رونده از $\partial\,\mathbb{V}$ را ببندد را میشود به شکل ِ (50) نوشت، که $\mathcal{M}$ پادمتقارن است و (54) را بر میآورَد. البته رُشن است که $\mathcal{M}$ ی که پادمتقارن باشد و (54) را براورد یکتا نیست. اگر $\mathcal{A}$ یک تانسُر ِ پادمتقارن (از رتبه یِ 3) باشد،

$$\nabla_j\,(\nabla_k\,\mathcal{A}^{i\,j\,k}) = 0. \tag{60}$$

پس با

$$\mathcal{M}'^{\,i\,j} := \mathcal{M}^{i\,j} + \nabla_k\,\mathcal{A}^{i\,j\,k}, \tag{61}$$

رابطه یِ (54) همارز است با

$$\nabla_j\,\mathcal{M}'^{\,i\,j} = J^i \tag{62}$$

و البته رُشن است که $\mathcal{M}'$ هم پادمتقارن است.

دُقطبی یِ مغناطیسی یِ یک تُزیع ِ جریان را با m نشان میدهم. m یک تانسُر ِ پادمتقارن است که چنین تعریف میشود

$$m^{i\,j} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\,[r^i\,J^j(\boldsymbol{r}) - r^j\,J^i(\boldsymbol{r})], \tag{63}$$

چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی را خارج- ِ-قسمت ِ $m_{\mathbb{V}}$ (دُقطبی یِ مغناطیسی یِ متناظر با $\boldsymbol{J}_{\mathbb{V}}$) بر

$V(\mathbb{V})$ در حد ِ $\mathbb{V}$ به صفر تعریف میکنم، مشابه با تعریف ِ چگالی یِ دُقطبی یِ الکتریکی.

$$\begin{aligned}
m_{\mathbb{V}}^{i\,j} &= \frac{1}{2}\,\left\{\int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}V\,[r^i\,J^j(\boldsymbol{r}) - r^j\,J^i(\boldsymbol{r})] + \oint_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}S\,[r^i\,K_{\mathbb{V}}^j(\boldsymbol{r}) - r^j\,K_{\mathbb{V}}^i(\boldsymbol{r})]\right\},\\
&= \frac{1}{2}\,\left\{\int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}V\,[r^i\,(\nabla_k\,\mathcal{M}^{j\,k})(\boldsymbol{r}) - r^j\,(\nabla_k\,\mathcal{M}^{i\,k})(\boldsymbol{r})]\right.\\
&\quad \left. + \oint_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}S\,[r^i\,(n_k\,\mathcal{M}^{k\,j})(\boldsymbol{r}) - r^j\,(n_k\,\mathcal{M}^{k\,i})(\boldsymbol{r})]\right\},\\
&= \frac{1}{2}\,\left\{\int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}V\,\nabla_k\,[r^i\,\mathcal{M}^{j\,k}(\boldsymbol{r}) - r^j\,\mathcal{M}^{i\,k}(\boldsymbol{r})]\right.\\
&\quad - \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}V\,[(\nabla_k\,r^i)\,\mathcal{M}^{j\,k}(\boldsymbol{r}) - (\nabla_k\,r^j)\,\mathcal{M}^{i\,k}(\boldsymbol{r})]\\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}V\,\nabla_k\,[r^i\,\mathcal{M}^{k\,j}(\boldsymbol{r}) - r^j\,\mathcal{M}^{k\,i}(\boldsymbol{r})]\right\},
\end{aligned} \tag{64}$$

که نتیجه میدهد

$$m_{\mathbb{V}}^{i\,j} = \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}V\,\mathcal{M}^{i\,j}(\boldsymbol{r}). \tag{65}$$

چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی را با M نشان میدهم. به این ترتیب،

$$M^{i\,j} = \mathcal{M}^{i\,j}. \tag{66}$$

از این که $\mathcal{M}$ ی که پادمتقارن باشد و (54) را براورَد یکتا نیست، دیده میشود چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی یکتا نیست. البته یکتانبودن ِ چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی را به یکتانبودن ِ $\boldsymbol{K}_{\mathbb{V}}$، چگالی یِ جریان ِ سطحی که برا یِ بستن ِ $\boldsymbol{J}_{\mathbb{V}}$ لازم است، هم میشود نسبت داد.

تعریف میکنم

$$(R^i\,F)(\boldsymbol{r}) := r^i\,F(\boldsymbol{r}). \tag{67}$$

از رابطه یِ (63) ممکن است چنین برداشت شود که $\tilde{M}$ با

$$\tilde{M}^{i\,j} = \frac{1}{2}\,(R^i\,J^j - R^j\,J^i), \tag{68}$$

چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی است (میتواند چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی باشد). اما این $\tilde{M}$ لزومَن

مانسته یِ (54) را بر نمی‌آورَد:

$$\begin{aligned}\nabla_j\,\tilde M^{i\,j} &= \frac{1}{2}\,(\delta^i_j\,J^j-\delta^j_j\,J^i)+\frac{1}{2}\,(R^i\,\nabla_j\,J^j-R^j\,\nabla_j\,J^i),\\ &= \frac{1-\nu}{2}\,J^i+\frac{1}{2}\,R^i\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}-\frac{1}{2}\,\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,J^i,\\ &= \frac{1-\nu}{2}\,J^i-\frac{1}{2}\,\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,J^i,\end{aligned} \tag{69}$$

که ν بُعد ِ فضا ست، و این به کار رفته که دیورژانس ِ $\boldsymbol{J}$ صفر است. حتا اگر در نقطه ای (یا ناحیه ای) مشتق ِ $\boldsymbol{J}$ صفر باشد هم $\tilde M$ در آن نقطه (یا ناحیه) چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی نیست. در واقع از (69) دیده میشود اگر در یک ناحیه مشتق ِ $\boldsymbol{J}$ صفر باشد، یک انتخاب برا یِ چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی

$$M^{i\,j}=\frac{1}{1-\nu}\,(R^i\,J^j-R^j\,J^i) \tag{70}$$

است.

حالت ِ خاص ی را میگیرم که جریان بر حجم ِ $\mathbb{V}$ ثابت است، و بیرون ِ این حجم صفر است. البته این جریان ِ حجمی یِ ثابت یک جریان ِ سطحی لازم دارد تا بسته شود. چگالی یِ جریان ِ سطحی را مثل ِ (50) میگیرم، که $\mathcal{M}$ هم ان M است، و M هم از (70) به دست میآید. با تعریف ِ m_{s} با

$$m_{\mathrm{s}}^{i\,j}:=\frac{1}{2}\,\oint_{\partial\,\mathbb{V}}\mathrm{d}S\,[r^i\,K_{\mathbb{V}}^j(\boldsymbol{r})-r^j\,K_{\mathbb{V}}^i(\boldsymbol{r})], \tag{71}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}m_{\mathrm{s}}^{i\,j} &= \frac{1}{2}\,\oint_{\partial\,\mathbb{V}}\mathrm{d}S\,\left\{r^i\,\left[\frac{n_k\,(R^k\,J^j-R^j\,J^k)(\boldsymbol{r})}{1-\nu}\right]-r^j\,\left[\frac{n_k\,(R^k\,J^i-R^i\,J^k)(\boldsymbol{r})}{1-\nu}\right]\right\},\\ &= \frac{1}{2\,(1-\nu)}\,\oint_{\partial\,\mathbb{V}}\mathrm{d}S\,n_k\,[R^k\,(R^i\,J^j-R^j\,J^i)](\boldsymbol{r}),\\ &= \frac{1}{2\,(1-\nu)}\,\int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}V\,\{\nabla_k\,[R^k\,(R^i\,J^j-R^j\,J^i)]\}(\boldsymbol{r}),\\ &= \frac{1}{2\,(1-\nu)}\,\int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}V\,[(\delta^k_k\,R^i+\delta^i_k\,R^k)\,J^j-(\delta^k_k\,R^j+\delta^j_k\,R^k)\,J^i](\boldsymbol{r}),\\ &= \frac{1+\nu}{2\,(1-\nu)}\,\int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}V\,(R^i\,J^j-R^j\,J^i)(\boldsymbol{r}).\end{aligned} \tag{72}$$

پس،

$$\begin{aligned} m^{ij} &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}V\,(R^i\,J^j - R^j\,J^i)(\boldsymbol{r}) + m_{\mathrm{s}}^{ij} \\ &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1+\nu}{2\,(1-\nu)}\right]\int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}V\,(R^i\,J^j - R^j\,J^i)(\boldsymbol{r}), \end{aligned} \tag{73}$$

که نتیجه میدهد

$$m^{ij} = \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}V\,\frac{(R^i\,J^j - R^j\,J^i)(\boldsymbol{r})}{1-\nu}. \tag{74}$$

دیده میشود (چنان که انتظار میرفت) که این دُقطبی یِ مغناطیسی با انتخاب ِ (70) سازگار است.

3 یک جواب ِ خاص برا یِ چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی

متناظر با چگالی-یِ-جریان ِ $\boldsymbol{J}$، تانسُر ِ M_0 را چنین تعریف میکنم.

$$M_0{}^{ij} := \frac{1}{1-\nu}\,(R^i\,J^j - R^j\,J^i). \tag{75}$$

M_0 ویژه‌گیها یِ چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی را میداشت، اگر $\boldsymbol{J}$ ثابت میبود. M_0 پادمتقارن هست، اما در حالت ِ کلی (که $\boldsymbol{J}$ ثابت نیست) مانسته یِ (62) را بر نمیآورَد:

$$\nabla_j\,M_0{}^{ij} = J^i - \frac{1}{1-\nu}\,\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,J^i, \tag{76}$$

که این به کار رفته که دیورژانس ِ $\boldsymbol{J}$ صفر است. تعریف میکنم

$$\boldsymbol{J}_1 := \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{1-\nu}\,\boldsymbol{J}. \tag{77}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}_1 &= \frac{1}{1-\nu}\,\nabla_i\,\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,J^i, \\ &= \frac{1}{1-\nu}\,[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} + \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J})]. \end{aligned} \tag{78}$$

پس چون دیورژانس ِ $\boldsymbol{J}$ صفر است،

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}_1 = 0. \tag{79}$$

مشابه با (75)، تعریف میکنم

$$M_1{}^{ij} := \frac{1}{1-\nu}\,(R^i\,J_1{}^j - R^j\,J_1{}^i), \tag{80}$$

و چون دیورژانس ِ $\boldsymbol{J}_1$ صفر است، مشابه با (76) نتیجه میشود

$$\nabla_j\, {M_1}^{i\,j} = {J_1}^i - \frac{1}{1-\nu}\,\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,{J_1}^i, \tag{81}$$

به این ترتیب،

$$\nabla_j\,(M_0+M_1)^{i\,j} = J^i - \frac{1}{1-\nu}\,\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,{J_1}^i. \tag{82}$$

ادامه میدهم. تعریف میکنم

$$\boldsymbol{J}_0 := \boldsymbol{J}. \tag{83}$$

$$\boldsymbol{J}_{\alpha+1} := \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{1-\nu}\,\boldsymbol{J}_\alpha. \tag{84}$$

$${M_\alpha}^{i\,j} := \frac{R^i\,{J_\alpha}^j - R^j\,{J_\alpha}^i}{1-\nu}. \tag{85}$$

با یک استقرا یِ ساده نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}_\alpha = 0. \tag{86}$$

از این هم، مشابه با آن چه برا یِ رسیدن به (76) به کار رفت، نتیجه میشود

$$\nabla_j\,{M_\alpha}^{i\,j} = {J_\alpha}^i - {J_{\alpha+1}}^i. \tag{87}$$

به این ترتیب،

$$\nabla_j\,\sum_{\alpha=0}^{\beta}{M_\alpha}^{i\,j} = J^i - {J_{\beta+1}}^i. \tag{88}$$

پس با

$$M = \sum_{\alpha=0}^{\infty} M_\alpha, \tag{89}$$

به شرط ِ این که این سری همگرا باشد، و بشود جمله-به-جمله از آن مشتق گرفت، و

$$\lim_{\alpha\to\infty}\boldsymbol{J}_\alpha = 0, \tag{90}$$

M ویژه‌گیها یِ چگالی یِ دُقطبی یِ را دارد:

$$\nabla_j\,M^{i\,j} = J^i. \tag{91}$$

(به ساده‌گی دیده میشود M پادمتقارن هم هست.) دیده میشود

$$M^{i\,j} = \frac{1}{1-\nu}\,(R^i\,\mathcal{J}^j - R^j\,\mathcal{J}^i), \tag{92}$$

که

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{J}} &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \boldsymbol{J}_\alpha,\\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left(\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{1-\nu}\right)^{\alpha} \boldsymbol{J}. \end{aligned} \tag{93}$$

از این رابطه نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \left(1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{1-\nu}\right)^{-1} \boldsymbol{J}, \tag{94}$$

یا

$$\left(1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{1-\nu}\right) \boldsymbol{\mathcal{J}} = \boldsymbol{J}, \tag{95}$$

که یک معادله یِ دیفرانسیل برا یِ $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ است. ضمنَن از (86) و برابری یِ اول در (93) دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}} = 0. \tag{96}$$

معادله یِ (95) برا یِ $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ با جمع-زدن ِ یک سری به دست آمد. میشد از (92) شروع کرد و با این شرط که M رابطه یِ (91) را براورَد به معادله یِ (95) برا یِ $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ رسید. از (92)، مشابه با آنچه برا یِ رسیدن به (69) به کار رفت، نتیجه میشود

$$\nabla_j\, M^{i\,j} = \mathcal{J}^i + \frac{1}{1-\nu}\, R^i\, \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}} - \frac{1}{1-\nu}\, \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}\, \mathcal{J}^i. \tag{97}$$

به این ترتیب، از (91) نتیجه میشود

$$\left(1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{1-\nu}\right) \boldsymbol{\mathcal{J}} + \frac{\boldsymbol{R}}{1-\nu}\, \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}} = \boldsymbol{J}. \tag{98}$$

این معادله هم ان (95) میشود، اگر (96) برقرار باشد، یعنی دیورژانس ِ $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ صفر باشد. نشان میدهم میشود دیورژانس ِ $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ را صفر کرد. میگیرم

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}' = \boldsymbol{\mathcal{J}} + \boldsymbol{R}\,\Lambda, \tag{99}$$

که Λ یک تابع ِ دلبخاه است. دیده میشود در (92) اگر $\boldsymbol{\mathcal{J}}'$ به جا یِ $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ نشانده شود، M عوض نمیشود. از این آزادی استفاده میکنم و Λ را چنان تعیین میکنم که دیورژانس ِ $\boldsymbol{\mathcal{J}}'$ صفر شود:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}' = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}} + (\nu + \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\Lambda, \tag{100}$$

که نتیجه میدهد شرط ِ صفرشدن ِ دیورژانس ِ $\boldsymbol{\mathcal{J}}'$ این است.

$$(\nu + \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\Lambda = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}. \tag{101}$$

به این ترتیب، صفرشدن ِ دیورژانس ِ $\mathcal{J}$ را میشود اعمال کرد. این به کار رفته که $(\nu + \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla})$ وارونپذیر است. در این صورت (98) هم ان (95) میشود.

مستقیمَن هم دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{1-\nu}\right)\mathcal{J} = \left(1-\frac{1}{1-\nu}-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{1-\nu}\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathcal{J},$$
$$= -\frac{\nu+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{1-\nu}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathcal{J}. \qquad (102)$$

پس اگر (95) برقرار باشد و دیورژانس ِ $\mathcal{J}$ صفر باشد، دیورژانس ِ $\boldsymbol{J}$ هم صفر است. و برعکس، اگر (95) برقرار باشد و دیورژانس ِ $\boldsymbol{J}$ صفر باشد، دیورژانس ِ $\mathcal{J}$ هم صفر است، باز بر اساس ِ این که $(\nu + \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla})$ وارونپذیر است.

به این ترتیب، یک جواب برا یِ چگالی یِ دُقطبی یِ مغناطیسی بر حسب ِ چگالی یِ جریان به شکل ِ (92) است، که در آن $\mathcal{J}$ از (94) به دست میآید، یا (95) را بر میآورَد. با فرض ِ این که سری یِ تِیلِر ِ $\boldsymbol{J}$ به $\boldsymbol{J}$ همگرا ست،

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\boldsymbol{J}_{i_1\cdots i_\alpha}\,r^{i_1}\cdots r^{i_\alpha}, \qquad (103)$$

که $\boldsymbol{J}_{i_1\cdots i_\alpha}$ ها ثابت ند، برا یِ $\mathcal{J}$ نتیجه میشود

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha}{1-\nu}\right)^{-1}\boldsymbol{J}_{i_1\cdots i_\alpha}\,r^{i_1}\cdots r^{i_\alpha}. \qquad (104)$$

4 پانوشتها

[1] John David Jackson; “classical electrodynamics”, 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[2] Barrett O’Neill; “elementary differential geometry”, (Academic Press, 1996)