X1-098 (2014/02/22)

مایع ی که میاُفتد

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

سرعت و مقطع ِ مایع ی که تحت ِ گرانش میاُفتد بررسی میشود، برا یِ حالت ی که جریان نسبت به راستا یِ قائم سمتی-متقارن است. برا یِ حل ِ معادلات یک روش اختلال به کار میرود.

1 تقریب ِ حرکت ِ قائم

آب ی که از یک شیر، قائم رو به پایین حرکت میکند هر چه پایینتر میرود باریکتر میشود. در یک بررسی یِ ساده، از مئلفه یِ افقی یِ سرعت ِ مایع چشم میپوشند. به این ترتیب با فرض ِ تراکمناپذیر-بودن و ناچرخشی-بودن ِ جریان میشود مئلفه یِ عمودی یِ سرعت و نیز اندازه یِ مقطع ِ جریان را بر حسب ِ ارتفاع به دست آورد. محور ِ z را قائم و رو به بالا (بر خلاف ِ میدان ِ گرانشی) میگیرم. بردار ِ سرعت را با $\boldsymbol{v}$ نشان میدهم. چشم پوشیدن از مئلفهها یِ افقی یِ سرعت یعنی

$$\boldsymbol{v} = v\,\hat{\boldsymbol{z}}. \qquad (1)$$

این که سرعت ِ ناچرخشی ست، یعنی v تابع ِ مختصات ِ عرضی (آنها یی که در راستا یِ قائم تغییر نمیکنند) نیست. به این ترتیب، v به فقط z بستهگی دارد. مایع را در سقوط ِ آزاد میگیرم: از گرانروی

چشم میپوشم. نتیجه میشود

$$v^2 - v^2(0) = -2\,g\,z, \tag{2}$$

که g شتاب ِ گرانش است. میشد گفت جریان را تراکم-ناپذیر هم میگیرم و معادله یِ برنولی [1] را مینویسم. باز (2) نتیجه میشود. البته (2) برا یِ مرز ِ مایع با هوا نتیجه میشود، جا یی که فشار ثابت است. اما v به مختصات ِ عرضی بسته‌گی ندارد، پس (2) همه جا درست است.

از (1) دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = \mathrm{D}\,v, \tag{3}$$

که $\mathrm{D}\,X$ مشتق ِ X است. از (2) هم دیده میشود

$$\mathrm{D}\,v = -\frac{g}{v}. \tag{4}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} \neq 0, \tag{5}$$

که این با تراکم-ناپذیر-بودن ِ جریان ناسازگار است. البته هر چه اندازه یِ v بزرگتر باشد اندازه یِ طرف ِ راست ِ (4) کوچکتر میشود، و ناسازگاری کمتر میشود.

از تراکم-ناپذیر-بودن ِ جریان ضمنَن نتیجه میشود جریان ِ حجمی یی که از هر مقطع ِ افقی میگذرد ثابت است:

$$\mathrm{D}\,Q = 0, \tag{6}$$

که $Q(z)$ جریان ِ حجمی است که از مقطع ِ در ارتفاع ِ z میگذرد:

$$Q = v\,A, \tag{7}$$

که $A(z)$ مساحت ِ مقطع ِ افقی یِ جریان در ارتفاع ِ z است. به این ترتیب،

$$A = \frac{Q}{v}. \tag{8}$$

صورت ثابت است و مخرج به z بسته‌گی دارد. پس A با تغییر ِ z تغییر میکند. این هم به ناسازگاری مینجامد: اگر A ثابت نباشد، دست-ِ-کم در لبه یِ جریان سرعت باید مئلفه یِ افقی هم داشته باشد. البته اینجا هم ناسازگاری کم میشود وقت ی مشتق ِ v کوچک شود.

نتیجه این که بخش ِ افقی یِ سرعت نمیتواند صفر باشد، اما اگر سرعت (بخش ِ قائم ِ سرعت) بزرگ باشد، مشتق ِ سرعت کوچک میشود و صفر-گرفتن ِ بخش ِ افقی یِ سرعت تقریب ِ خوب ی ست.

2 حرکتِ ناچرخشی سمتی-متقارن

برا یِ چنین حرکت ی،

$$\boldsymbol{v} = v\,\hat{\boldsymbol{z}} + w\,\hat{\boldsymbol{\rho}}, \tag{9}$$

که (ρ, ϕ, z) مختصاتِ استوانه‌ای یند و v و w تابعِ ρ و z ند. از تراکمناپذیری یِ نتیجه میشود دیورژانسِ v صفر است:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{10}$$

که یعنی

$$\frac{1}{\rho}\,\mathrm{D}_\rho\,\rho\,w + \mathrm{D}_z\,v = 0, \tag{11}$$

که D_ρ و D_z، به ترتیب، مشتقِ پاره‌ای نسبت به ρ و z اند. معادله یِ برنولی [1] هم میشود

$$v^2 + w^2 + 2\,g\,z + 2\,p = c + 2\,p_0, \tag{12}$$

که p فشار تقسیم بر چگالی یِ مایع، p_0 فشارِ هوا تقسیم بر چگالی یِ مایع، و c یک ثابت است. ناچرخشی-بودنِ جریان هم میشود

$$\mathrm{D}_\rho\,v = \mathrm{D}_z\,w. \tag{13}$$

مقطعِ جریان در ارتفاعِ z یک قرص به شعاع $R(z)$ است، و

$$Q = 2\,\pi\int_0^R \mathrm{d}\rho\,\rho\,v(\rho, z). \tag{14}$$

معادله یِ (12) به ازا یِ $\rho = R(z)$ یک شرطِ مرزی برا یِ سرعت است:

$$v^2(R, z) + w^2(R, z) + 2\,g\,z = c, \tag{15}$$

چون در مرزِ مایع و هوا فشار ثابت است (هم ان فشارِ جو است). به این ترتیب با استفاده از (15) به جا یِ (12)، فشار حذف میشود. (12) را میشود برا یِ محاسبه یِ فشار به کار برد.

با استفاده از معادلاتِ (11) و (13) تا (15) با شرایطِ مرزی یِ کافی علی‌الاصول میشود v و w و R را به دست آورد.

میگیرم

$$v = \sum_{k=0}^{\infty}\rho^{2\,k}\,v_k, \tag{16}$$

که v_k ها تابع ِ فقط z اند. این را در (11) میگذارم. نتیجه میشود

$$w = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{2\,k+1}}{2\,k+2}\, \mathrm{D}\, v_k. \tag{17}$$

این را در (13) میگذارم. نتیجه میشود

$$\mathrm{D}_\rho\, v = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{2\,k+1}}{2\,k+2}\, \mathrm{D}^2\, v_k, \tag{18}$$

و از آنجا،

$$v_{k+1} = -\frac{\mathrm{D}^2\, v_k}{(2\,k+2)^2}. \tag{19}$$

v_0 را با u نشان میدهم. به این ترتیب،

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, \rho^{2\,k}\, \mathrm{D}^{2\,k}}{2^{2\,k}\, (k!)^2}\, u. \tag{20}$$

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\, \rho^{2\,k+1}\, \mathrm{D}^{2\,k+1}}{2^{2\,k+1}\, k!\, (k+1)!}\, u. \tag{21}$$

u تابع ِ فقط ارتفاع است، و باید از معادلات ِ (14) و (15) همراه با شرایط ِ مرزی یِ مناسب تعیین شود.

(20) را در (14) میگذارم:

$$Q = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, R^{2\,k+2}\, \mathrm{D}^{2\,k}}{2^{2\,k}\, k!\, (k+1)!}\, u. \tag{22}$$

(15) هم میشود

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, R^{2\,k}\, \mathrm{D}^{2\,k}}{2^{2\,k}\, (k!)^2}\, u\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\, R^{2\,k+1}\, \mathrm{D}^{2\,k+1}}{2^{2\,k+1}\, k!\, (k+1)!}\, u\right]^2 + 2\,g\,z = c. \tag{23}$$

R و u تابع ِ فقط z اند. Q یک ثابت ِ معلوم است. شرط ِ مرزی هم میتواند مقدار ِ R در یک ارتفاع ِ معین باشد:

$$R(0) = R_0. \tag{24}$$

رابطه‌ها یِ (22) تا (24) علی‌الاصول u و R و ثابت ِ c را میدهند. البته ثابت ِ c یک ابزار ِ کمکی ست: میشد (23) را به این شکل نوشت که مقدار ِ طرف ِ چپ در z برابر ِ مقدار ِ طرف ِ چپ در 0 است. اما چه c نگه داشته شود و چه c نگه داشته نشود، رابطه‌ها یِ (22) تا (24) معادله‌ها یی پیچیده اند. هم ناخطی اند، و هم این که معادله یِ دیفرانسیل نیستند: بیشترین مرتبه یِ مشتق که در این معادلات وارد شده باپایان نیست.

3 تحلیلِ بُعدی

کمیتها یِ مسئله را بر حسبِ متغیرها یِ بیبُعد مینویسیم. برا یِ این کار تعریف میکنم

$$R =: R_0\,\tilde{R}. \tag{25}$$

$$u =: \frac{Q}{\pi\,R_0^2}\,\tilde{u}. \tag{26}$$

$$g =: \frac{Q^2}{2\,\pi^2\,R_0^5}\,\tilde{g}. \tag{27}$$

$$\begin{aligned} z &=: \frac{R_0}{\tilde{g}}\,\tilde{z},\\ &=\ \frac{Q^2}{2\,\pi^2\,R_0^4\,g}\,\tilde{z}. \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &=: \frac{\tilde{g}}{R_0}\,\tilde{\mathrm{D}},\\ &=\ \frac{2\,\pi^2\,R_0^4\,g}{Q^2}\,\tilde{\mathrm{D}}. \end{aligned} \tag{29}$$

$$c =: \frac{Q_0^2}{\pi^2\,R_0^4}\,\tilde{c}. \tag{30}$$

$\tilde{\mathrm{D}}$ مشتقگیری نسبت به $\tilde{z}$ (ارتفاعِ بیبُعدشده) است. رابطهها یِ (22) تا (24) میشوند

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\tilde{g}^{2\,k}\,\tilde{R}^{2\,k+2}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k}}{2^{2\,k}\,k!\,(k+1)!}\,\tilde{u}. \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c} = \tilde{z} &+ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\tilde{g}^{2\,k}\,\tilde{R}^{2\,k}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k}}{2^{2\,k}\,(k!)^2}\,\tilde{u}\right]^2\\ &+ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\,\tilde{g}^{2\,k+1}\,\tilde{R}^{2\,k+1}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k+1}}{2^{2\,k+1}\,k!\,(k+1)!}\,\tilde{u}\right]^2. \end{aligned} \tag{32}$$

$$1 = \tilde{R}(0). \tag{33}$$

دیده میشود این معادلهها یک پارامترِ آزاد بیشتر ندارند، که $\tilde{g}$ است. $\tilde{c}$ بر حسبِ بقیه یِ متغیرها میشود

$$\tilde{c} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\tilde{g}^{2\,k}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k}}{2^{2\,k}\,(k!)^2}\,\tilde{u}\right]^2(0) + \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\,\tilde{g}^{2\,k+1}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k+1}}{2^{2\,k+1}\,k!\,(k+1)!}\,\tilde{u}\right]^2(0). \tag{34}$$

معادلهها یِ (31) و (32) همراه با شرطِ مرزی یِ (33) علیالاصول $\tilde{c}$ و $\tilde{u}$ و $\tilde{R}$ را میدهند.

برا یِ مثلفه‌ها یِ سرعت هم، با تعریفها یِ

$$v =: \frac{Q}{\pi\,R_0^2}\,\tilde{v}, \tag{35}$$

$$w =: \frac{Q}{\pi\,R_0^2}\,\tilde{w}, \tag{36}$$

$$\rho =: R_0\,\tilde{\rho}, \tag{37}$$

از (20) و (21) نتیجه میشود

$$\tilde{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\tilde{g}^{2\,k}\,\tilde{\rho}^{2\,k}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k}}{2^{2\,k}\,(k!)^2}\,u. \tag{38}$$

$$\tilde{w} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\,\tilde{g}^{2\,k+1}\,\tilde{\rho}^{2\,k+1}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k+1}}{2^{2\,k+1}\,k!\,(k+1)!}\,u. \tag{39}$$

4 یک روشِ اختلال برا یِ حلِ معادلات

تقریبِ حرکتِ قائم وقت ی خوب است که سرعت بزرگ باشد، یا هم‌ارز با آن شتابِ گرانش کوچک باشد. بر حسبِ پارامترها یِ بی‌بُعد، این شرطها آن ‌َند که $\tilde{g}$ کوچک باشد. پس برا یِ حلِ معادلات اختلال با پارامترِ $\tilde{g}$ (در واقع بسط بر حسبِ $\tilde{g}^2$) را به کار میبرم. هم‌ارز با این، یک روشِ تکرار هست: با فرضِ این که $\tilde{u}_{(n-1)}$ و $\tilde{R}_{(n-1)}$ و $\tilde{c}_{(n-1)}$ به دست آمده اند:

$$\tilde{u}_{(n)}(0) \overset{n}{=} 1 - \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\tilde{g}^{2\,k}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k}}{2^{2\,k}\,k!\,(k+1)!}\,\tilde{u}_{(n-1)}\right](0). \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{(n)} \overset{n}{=} &\left[\tilde{u}_{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\tilde{g}^{2\,k}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k}}{2^{2\,k}\,(k!)^2}\,\tilde{u}_{(n-1)}\right]^2(0)\\ &+ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\,\tilde{g}^{2\,k+1}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k+1}}{2^{2\,k+1}\,k!\,(k+1)!}\,\tilde{u}_{(n-1)}\right]^2(0).\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{(n)} \overset{n}{=} &\left\{\tilde{c}_{(n)} - \tilde{z} - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\,\tilde{R}_{(n-1)}^{2\,k+1}\,\tilde{g}^{2\,k+1}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k+1}}{2^{2\,k+1}\,k!\,(k+1)!}\,\tilde{u}_{(n-1)}\right]^2\right\}^{1/2}\\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\tilde{R}_{(n-1)}^{2\,k}\,\tilde{g}^{2\,k}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k}}{2^{2\,k}\,(k!)^2}\,\tilde{u}_{(n-1)}.\end{aligned} \tag{42}$$

$$\tilde{R}_{(n)} \overset{n}{=} \left[\tilde{u}_{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\tilde{R}_{(n-1)}^{2\,k}\,\tilde{g}^{2\,k}\,\tilde{\mathrm{D}}^{2\,k}}{2^{2\,k}\,k!\,(k+1)!}\,\tilde{u}_{(n-1)}\right]^{-1/2}. \tag{43}$$

$X \overset{n}{=} Y$ یعنی دُطرف تا مرتبه یِ n نسبت به $\tilde{g}^2$ برابر ند. به این ترتیب، در (40) تا (43) کافی ست عبارتها یِ طرف ِ راست تا مرتبه یِ n نسبت به $\tilde{g}^2$ محاسبه شوند. به هم ین خاطر جمعها یِ طرف ِ راست شامل ِ تعداد ی باپایان جمله اند.

مرتبه یِ صفر متناظر با $(\tilde{g} = 0)$ است. از (40) تا (43) نتیجه میشود

$$\tilde{u}_{(0)}(0) = 1. \tag{44}$$

$$\tilde{c}_{(0)} = 1. \tag{45}$$

$$\tilde{u}_{(0)} = (1 - \tilde{z})^{1/2}. \tag{46}$$

$$\tilde{R}_{(0)} = (1 - \tilde{z})^{-1/4}. \tag{47}$$

البته اینها را میشد مستقیمَن از (31) تا (33) هم به دست آورد. اگر در (31) و (32) مقدار ِ $\tilde{g}$ را صفر بگذارم، نتیجه میشود

$$1 = \tilde{R}_{(0)}\, \tilde{u}_{(0)}^2. \tag{48}$$

$$\tilde{c} = \tilde{z} + \tilde{u}_{(0)}^2. \tag{49}$$

از (48) در $\tilde{z} = 0$، همراه با (33) رابطه یِ (44) نتیجه میشود. از این، همراه با (49) در $\tilde{z} = 0$، رابطه یِ (45) به دست میآید. با گذاشتن ِ (45) در (49) رابطه یِ (46) به دست میآید. از این و (48) هم (47) نتیجه میشود.

تقریب ِ مرتبه یِ صفر در واقع هم ان تقریب ِ حرکت ِ قائم است:

$$\tilde{v}_{(0)} = (1 - \tilde{z})^{1/2}. \tag{50}$$

$$\tilde{w}_{(0)} = 0. \tag{51}$$

در این تقریب، سرعت ِ افقی صفر است.

4.1 تقریب ِ مرتبه ی ِیک

(44) تا (47) را در (40) تا (43) میگذارم:

$$\tilde{u}_{(1)}(0) = 1 - \frac{\tilde{g}^2}{32}. \tag{52}$$

$$\tilde{c}_{(1)} = 1 + \frac{\tilde{g}^2}{8}. \tag{53}$$

$$\tilde{u}_{(1)} = (1-\tilde{z})^{1/2} + \frac{\tilde{g}^2}{16}\,(1-\tilde{z})^{-1/2} - \frac{3\,\tilde{g}^2}{32}\,(1-\tilde{z})^{-2}. \tag{54}$$

$$\tilde{R}_{(1)} = (1-\tilde{z})^{-1/4} - \frac{\tilde{g}^2}{32}\,(1-\tilde{z})^{-5/4} + \frac{\tilde{g}^2}{32}\,(1-\tilde{z})^{-11/4}. \tag{55}$$

مثلفه‌ها ی ِسرعت هم میشوند

$$\tilde{v}_{(1)} = (1-\tilde{z})^{1/2} + \frac{\tilde{g}^2}{16}\,(1-\tilde{z})^{-1/2} - \frac{3\,\tilde{g}^2}{32}\,(1-\tilde{z})^{-2} + \frac{\tilde{g}^2}{16}\,\tilde{\rho}^2\,(1-\tilde{z})^{-3/2}. \tag{56}$$

$$\tilde{w}_{(1)} = -\frac{\tilde{g}}{4}\,\tilde{\rho}\,(1-\tilde{z})^{-1/2}. \tag{57}$$

با اینها، از جمله میشود فشار (تقسیم بر چگالی) را حساب کرد. از (12) نتیجه میشود

$$p = p_0 + \frac{Q^2}{2\,\pi^2\,R_0^4}\,(\tilde{c} - \tilde{z} - \tilde{v}^2 - \tilde{w}^2) \tag{58}$$

به این ترتیب،

$$p_{(1)} = p_0 + \frac{Q^2}{2\,\pi^2\,R_0^4}\,\frac{3\,\tilde{g}^2}{16}\,[(1-\tilde{z})^{-3/2} - (1-\tilde{z})^{-1}\,\tilde{\rho}^2]. \tag{59}$$

با استفاده از (47) (که مقدار ِ $\tilde{R}$ تا مرتبه ی ِصفر را میدهد)،

$$p_{(1)} \stackrel{1}{=} p_0 + \frac{Q^2}{2\,\pi^2\,R_0^4}\,\frac{3\,\tilde{g}^2}{16}\,(1-\tilde{z})^{-3/2}\,\left[1 - \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{R}}\right)^2\right]. \tag{60}$$

فشار در مرز ِ مایع و هوا هم ان فشار ِ جو است، چنان که انتظار میرفت، و با دورشدن از این مرز (به طرف ِ درون ِ مایع) زیاد میشود.

5 پانوشتها

[1] Bernoulli