X1-103 (2014/10/30)

پراکنش در یک بُعد II

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

بازتابش و عبور ِ مُجها در یک بُعد بررسی میشود، با این هدف که بخش ِ کوانتمی (مُجی) از بخش ِ کلاسیک (ذره‌ای) جدا شود.

0 درامد

مکانیک ِ کلاسیک میگوید ذره ای که انرژی یَش همه جا از انرژی یِ پتانسیل بیشتر است، سرعت َش صفر نمیشود و بنابراین برنمیگردد. این برا یِ باریکه ای از ذرات هم (که انرژی یِ هر یک همه جا بیش از انرژی یِ پتانسیل است) درست است. اما بر اساس ِ مکانیک ِ کوانتمی (مُجی) متناظر با چنین باریکه ای یک ضریب- ِ بازگشت هست که نشانه یِ آن است که بخش ی از باریکه باز میتابد، حتا اگر هیچ بخش ی از فضا در ناحیه یِ کلاسیکی- ممنوع (انرژی کمتر از انرژی یِ پتانسیل) نباشد. برا یِ مُج ی که از راست میتابد،

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \exp(\mathrm{i}\,k\,x) + R(k)\,\exp(-\mathrm{i}\,k\,x), & x \sim -\infty \\ \tilde{T}(k)\,\exp(\mathrm{i}\,\tilde{k}\,x), & x \sim +\infty \end{cases}, \qquad (1)$$

که ψ_k تابع- ِ-مُج ِ متناظر با مُج ی ست که از چپ با عدد- ِ-مُج ِ k میتابَد. x مکان است و R و $\tilde{T}$ ضریبها یِ به ترتیب بازگشت و عبور ند، مثلَن [1]. فقط یک دسته انرژی یِ گسسته هست که به ازا یِشان ضریب ِ بازگشت صفر میشود و بازتابش حذف میشود. وقت ی تقریب ِ کلاسیک بهتر میشود، ضریب ِ بازگشت کوچک میشود (اگر ناحیه یِ کلاسیکی-ممنوع نباشد). هدف بررسی یِ این رفتارها و محاسبه یِ ضریب ِ بازگشت در تقریب ِ شبه- ِ-کلاسیک است.

ψ_k این معادله را بر میآورد

$$(\mathrm{D}^2 + q^2)\,\psi_k = 0, \tag{2}$$

که D مشتقگیری ست و

$$\lim_{x\to -\infty} q(x) = k. \tag{3}$$

در کوانتم-مکانیک، (2) هم ان معادله-یِ-شْرُدینگِر [2] ِ مستقل-از-زمان است، که

$$\begin{aligned} q(x) &= \hbar^{-1}\,\sqrt{2\,m\,[E - V(x)]},\\ &= \frac{p(x)}{\hbar}, \end{aligned} \tag{4}$$

که $V(x)$ انرژی یِ پتانسیل در x است، و m جرم ِ ذره و E انرژی یِ آن است. $p(x)$ تکانه یِ (کلاسیک ِ) ذره در x است.

1 انرژی- ِ-پتانسیل ِ تکهای-ثابت، و ماتریس ِ انتقال

انرژی یِ پتانسیل تکهای-ثابت است، اگر

$$V(x) = V_j, \qquad a_j < x < b_j, \tag{5}$$

که V_j ها ثابت ند،

$$b_j = a_{j+1}, \tag{6}$$

و هر x ِ حقیقی در یک ی از بازهها یِ $[a_j, b_j]$ هست. در این صورت تابع- ِ-مُج ِ ψ میشود

$$\psi(x) = A_j\,\exp(\mathrm{i}\,q_j\,x) + B_j\,\exp(-\mathrm{i}\,q_j\,x), \qquad a_j < x < b_j, \tag{7}$$

که A_j ها و B_j ها ثابت ند و باید شرایط ِ مرزی را براورند. همچنین،

$$q_j = \hbar^{-1}\,\sqrt{2\,m\,(E-V_j)}. \tag{8}$$

تعریف میکنم

$$\psi^+(x) = A_j\,\exp(\mathrm{i}\,q_j\,x), \qquad a_j < x < b_j. \tag{9}$$

$$\psi^-(x) = B_j\,\exp(-\mathrm{i}\,q_j\,x), \qquad a_j < x < b_j. \tag{10}$$

در مرز ِ بازه‌ها، تابع- ِ-مُج و مشتق ِ اول ِ آن پیوسته اند. این یعنی

$$\psi^+(b_j^-) + \psi^-(b_j^-) = \psi^+(b_j^+) + \psi^-(b_j^+). \tag{11}$$

$$q_j\,[\psi^+(b_j^-) - \psi^-(b_j^-)] = q_{j+1}\,[\psi^+(b_j^+) - \psi^-(b_j^+)]. \tag{12}$$

با تعریف ِ

$$\Psi = \begin{bmatrix}\psi^+\\ \psi^-\end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$Q_{j\,j+1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+\dfrac{q_{j+1}}{q_j} & 1-\dfrac{q_{j+1}}{q_j}\\ 1-\dfrac{q_{j+1}}{q_j} & 1+\dfrac{q_{j+1}}{q_j}\end{bmatrix}, \tag{14}$$

دیده میشود

$$\Psi(b_j^-) = Q_{j\,j+1}\,\Psi(b_j^+). \tag{15}$$

همچنین، با تعریف ِ

$$C_j = \begin{bmatrix}\exp[-\mathrm{i}\,q_j\,(b_j-a_j)] & 0\\ 0 & \exp[\mathrm{i}\,q_j\,(b_j-a_j)]\end{bmatrix}, \tag{16}$$

دیده میشود

$$\Psi(a_j^+) = C_j\,\Psi(b_j^-). \tag{17}$$

از ترکیب ِ این با (6) و (15) دیده میشود

$$\Psi(b_j^-) = U_{j\,j+1}\,\Psi(b_{j+1}^-), \tag{18}$$

که

$$U_{j\,j+1} = Q_{j\,j+1}\, C_{j+1}. \tag{19}$$

بر حسبِ

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

ماتریسها یِ Q و C میشوند

$$Q_{j\,j+1} = \Pi_1 + \frac{q_{j+1}}{q_j}\,\Pi_2. \tag{23}$$

$$C_j = \exp[-\mathrm{i}\, q_j\,(b_j - a_j)\,\sigma]. \tag{24}$$

Π_1 و Π_2 افکنش ند، مجموعِ شان 1 است، با هم جابه‌جا میشوند، و حاصل- ـِ-ضربِ شان صفر است:

$$(\Pi_1)^2 = \Pi_1. \tag{25}$$

$$(\Pi_2)^2 = \Pi_2. \tag{26}$$

$$\Pi_1 + \Pi_2 = 1. \tag{27}$$

$$\Pi_1\,\Pi_2 = 0. \tag{28}$$

$$\Pi_2\,\Pi_1 = 0. \tag{29}$$

به این ترتیب،

$$Q_{j\,j+1} = \exp\{[\ln(q_{j+1}/q_j)]\,\Pi_2\}, \tag{30}$$

و از آنجا،

$$U_{j\,j+1} = \exp\{[\ln(q_{j+1}/q_j)]\,\Pi_2\}\ \exp[-\mathrm{i}\, q_{j+1}\,(b_{j+1} - a_{j+1})\,\sigma]. \tag{31}$$

2 تقریب ِ انرژی-یِ-پتانسیل با یک تابع ِ تکه‌ای-ثابت

انرژی یِ پتانسیل را با یک تابع ِ تکه‌ای-ثابت، رابطه یِ (5)، تقریب میزنم. تقریب دقیق میشود، وقت ی طول ِ بازه‌ها به صفر بگراید. در این حالت،

$$U_{j\,j+1} = \exp\{[\ln(q_{j+1}/q_j)]\,\Pi_2 - \mathrm{i}\,q_{j+1}\,(b_{j+1}-b_j)\,\sigma + \cdots\},$$
$$= \exp\left[\int_{b_j^-}^{b_{j+1}^-} \mathrm{d}x\,W(x) + \cdots\right], \tag{32}$$

که

$$W = \left[\mathrm{D}\,\left(\ln\frac{q}{c}\right)\right]\,\Pi_2 - \mathrm{i}\,q\,\sigma, \tag{33}$$

و c یک ثابت است (برا یِ این وارد شده که متغیر ِ لگاریتم بی-بُعد شود). وقت یِ V هموار باشد و E از V بزرگتر باشد، q هموار است. در این حالت،

$$W = \frac{(\mathrm{D}\,q)}{q}\,\Pi_2 - \mathrm{i}\,q\,\sigma. \tag{34}$$

عملگر ِ انتقال ِ U را چنین تعریف میکنم.

$$U(x,y) = \mathrm{Pexp}\int_x^y \mathrm{d}x'\,W(x'), \tag{35}$$

که Pexp نمایی یِ مسیر-مرتب است:

$$\mathrm{Pexp}\int_x^z \mathrm{d}x'\,S(x') = \left[\mathrm{Pexp}\int_x^y \mathrm{d}x'\,S(x')\right]\,\left[\mathrm{Pexp}\int_y^z \mathrm{d}x'\,S(x')\right], \tag{36}$$

$$\mathrm{Pexp}\int_x^{x+\delta} \mathrm{d}x'\,S(x') = 1 + S(x)\,\delta + o(\delta). \tag{37}$$

با تعریف ِ (35) و با استفاده از (18) و (32) دیده میشود

$$\Psi(x) = U(x,y)\,\Psi(y). \tag{38}$$

از تعریف ِ U دیده میشود

$$\frac{\partial}{\partial x}\,U(x,y) = -W(x)\,U(x,y). \tag{39}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{D}\,\Psi = -W\,\Psi. \tag{40}$$

3 حل ِ مستقیم ِ معادله

رابطه یِ (40) بر اساس ِ تقریب-کردن ِ انرژی یِ پتانسیل با یک تابع ِ تکه‌ای-ثابت به دست آمد. ψ^+ و ψ^-، و در نتیجه Ψ، هم بر هم ین اساس تعریف شدند. میخاهم تعریف ِ ψ^+ و ψ^- و Ψ، و نیز ِ استنتاج ِ (40) را مستقل از آن تقریب کنم. تعریف میکنم

$$\psi^{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\mathrm{i}\,q}\,\mathrm{D}\right)\,\psi. \tag{41}$$

با

$$u_{\pm} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}, \tag{42}$$

$$s^{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \end{bmatrix}, \tag{43}$$

دیده میشود

$$\Psi = \left[u_+ + u_-\,\left(\frac{1}{\mathrm{i}\,q}\,\mathrm{D}\right)\right]\,\psi. \tag{44}$$

$$\psi = s^+\,\Psi. \tag{45}$$

$$\frac{1}{\mathrm{i}\,q}\,\mathrm{D}\,\psi = s^-\,\Psi. \tag{46}$$

همچنین،

$$\Pi_2 = u_-\,s^-. \tag{47}$$

$$\sigma = u_-\,s^+ + u_+\,s^-. \tag{48}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,\Psi &= u_+\,\mathrm{D}\,\psi + u_-\,\left[-\frac{(\mathrm{D}\,q)\,(\mathrm{D}\,\psi)}{\mathrm{i}\,q^2} + \frac{(\mathrm{D}^2\,\psi)}{\mathrm{i}\,q}\right], \\
&= \mathrm{i}\,q\,u_+\,s^-\,\Psi - \frac{(\mathrm{D}\,q)}{q}\,u_-\,s^-\,\Psi + \mathrm{i}\,q\,u_-\,s^+\,\Psi, \\
&= \mathrm{i}\,q\,\sigma\,\Psi - \frac{(\mathrm{D}\,q)}{q}\,\Pi_2\,\Psi,
\end{aligned} \tag{49}$$

که هم ان (40) است.

4 ضریبها یِ بازگشت و عبور

جوابِ معادله یِ (49) یا هم ان (40)، از (38) و (35) به دست میآید. البته میشود (39) همراه با

$$U(x,x)=1 \tag{50}$$

را هم به جا یِ (35) به کار برد.

از (1) دیده میشود برا یِ مُج ی که از راست میتابد،

$$\Psi_k(x)=\begin{bmatrix}\exp(\mathrm{i}\,k\,x)\\ R(k)\,\exp(-\mathrm{i}\,k\,x)\end{bmatrix},\qquad x\sim-\infty. \tag{51}$$

$$\Psi_k(x)=\begin{bmatrix}\tilde T(k)\,\exp(\mathrm{i}\,\tilde k\,x)\\ 0\end{bmatrix},\qquad x\sim+\infty. \tag{52}$$

به این ترتیب با تعریفِ

$$v=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \tag{53}$$

$$r^+=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, \tag{54}$$

$$r^-=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}, \tag{55}$$

دیده میشود

$$[\tilde T(k)]^{-1}=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to\infty}}\Big\{\exp(-\mathrm{i}\,k\,x-\mathrm{i}\,\tilde k\,y)\,[r^+\,U(x,y)\,v]\Big\}. \tag{56}$$

$$[\tilde T(k)]^{-1}\,R(k)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to\infty}}\Big\{\exp(\mathrm{i}\,k\,x-\mathrm{i}\,\tilde k\,y)\,[r^-\,U(x,y)\,v]\Big\}. \tag{57}$$

به این ترتیب،

$$\tilde T(k)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to\infty}}\Big\{\exp(\mathrm{i}\,k\,x+\mathrm{i}\,\tilde k\,y)\,[r^+\,U(x,y)\,v]^{-1}\Big\}. \tag{58}$$

$$R(k)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to\infty}}\big\{\exp(2\,\mathrm{i}\,k\,x)\,[r^-\,U(x,y)\,v]\,[r^+\,U(x,y)\,v]^{-1}\big\}. \tag{59}$$

W شامل ِ دُ جمله است:

$$W = W_{\rm c} + \Upsilon. \tag{60}$$

$$W_{\rm c} = \frac{p}{{\rm i}\,\hbar}\,\sigma. \tag{61}$$

$$\Upsilon = \frac{({\rm D}\,p)}{p}\,\Pi_2. \tag{62}$$

در حد ِ تکانه یِ بزرگ یا $\hbar$ ِ کوچک، یعنی

$$\frac{\hbar\,|{\rm D}\,p|}{p^2} \ll 1, \tag{63}$$

$W_{\rm c}$ جمله یِ غالب در W است. (63) حد ِ شبه- ِ-کلاسیک است. به هم ین خاطر به $W_{\rm c}$ سهم ِ کلاسیک، و به Υ سهم ِ کوانتمی میگویم. اگر Υ خیل ی کوچکتر از $W_{\rm c}$ باشد، میشود با Υ مثل ِ یک اختلال رفتار کرد. تعریف میکنم

$$U_{\rm c}(x,y) = {\rm Pexp}\int_x^y {\rm d}x'\,W_{\rm c}(x'). \tag{64}$$

نتیجه میشود،

$$U(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{(n)}. \tag{65}$$

$$\begin{aligned} U_{(n)}(x,y) = \int_x^y {\rm d}x_1 \int_{x_1}^y {\rm d}x_2 \cdots \int_{x_{n-1}}^y {\rm d}x_n \\ U_{\rm c}(x,x_1)\,\Upsilon(x_1)\,U_{\rm c}(x_1,x_2)\cdots\Upsilon(x_n)\,U_{\rm c}(x_n,y). \end{aligned} \tag{66}$$

از جمله،

$$U_{(0)}(x,y) = U_{\rm c}(x,y). \tag{67}$$

$$U_{(1)}(x,y) = \int_x^y {\rm d}x'\,U_{\rm c}(x,x')\,\Upsilon(x')\,U_{\rm c}(x',y). \tag{68}$$

دیده میشود

$$U_{(0)}(x,y) = \exp\left[-{\rm i}\,\sigma\,\int_x^y {\rm d}x'\,q(x')\right]. \tag{69}$$

$U_{(0)}$، که هم ان $U_{\rm c}$ ست، قطری ست. پس

$$R_{(0)}(k) = 0. \tag{70}$$

از اینجا،

$$R_{(1)}(k) = \lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to\infty}} \left\{\exp(2\,\mathrm{i}\,k\,x)\,[r^-\,U_{(1)}(x,y)\,v]\,[r^+\,U_{(0)}(x,y)\,v]^{-1}\right\},$$
$$= \lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to\infty}} \left\{\exp(2\,\mathrm{i}\,k\,x)\int_x^y \mathrm{d}x'\,\exp\left[\mathrm{i}\int_x^{x'}\mathrm{d}z\,q(z)\right][r^-\,\Upsilon(x')\,v]\right.$$
$$\left.\exp\left[-\,\mathrm{i}\int_{x'}^y \mathrm{d}z\,q(z)\right]\exp\left[\mathrm{i}\int_x^y \mathrm{d}z\,q(z)\right]\right\}, \qquad (71)$$

که نتیجه میدهد

$$R_{(1)}(k) = \lim_{x\to-\infty}\left\{-\frac{1}{2}\int_x^\infty \mathrm{d}x'\,\exp\left[2\,\mathrm{i}\,k\,x+2\,\mathrm{i}\int_x^{x'}\mathrm{d}z\,q(z)\right]\frac{(\mathrm{D}\,p)(x')}{p(x')}\right\}. \qquad (72)$$

وقت ی نقطه یِ بازگشت وجود نداشته باشد، q همواره حقیقی و مثبت است. در حد ِ طول- ِ-مُج ِ کوتاه (q یِ بزرگ، یا $\hbar$ ِ کوچک) جمله یِ نمایی در انتگرالده به شدت با x' نوسان میکند، و این انتگرال را کوچک میکند. این یعنی در حد ِ طول- ِ-مُج- ِ-کوتاه، بازتابش حذف میشود.

5 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «پراکنش در یک بُعد I»، X1-023 (2004/04/01)

[2] Schrödinger