X1-106 (2015/02/20)

شکلِ مانا یِ سطحِ یک شاره یِ متحرک

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

یک شاره یِ آرمانی یِ تراکم-ناپذیربررسی میشود که در یک کانال حرکت میکند. اگر عمقِ کانال یکنواخت نباشد، حرکتِ شاره سطحِ آزادِ شاره را از حالتِ افقی بیرون میبرد. شکلِ این سطح در حالتِ مانا، بر حسبِ شکلِ سطحِ کفِ کانال، عمقِ کانال، و سرعتِ جریان به دست میآید.

0 درامد

یک شاره یِ ارمانی و تراکم-ناپذیر که با سرعتِ ثابت در یک کانالِ یکنواخت حرکت میکند، در حالتِ مانا سطح-ِ-آزادَش افقی میماند. اما اگر کفِ کانال افقی نباشد، سطحِ آزاد هم افقی نمیماند. انتظار میرود در عمقها یِ کم شکلِ سطح شبیهِ شکلِ کف باشد، و هر چه عمق بیشتر شود اثرِ کف بر سطح کم شود. مختصاتِ دکَرتی یِ (x, y, z) را چنان میگیرم که x در راستا یِ طولی و z در راستا یِ عرضی یِ کانال، و y در راستا یِ عمودی باشد. جهتِ افزایشِ y را هم رو-به-بالا میگیرم. کمیتها یِ مختلف در کانال (از جمله سرعتِ شاره، پهنا، و عمق) را مستقل از z میگیرم. مئلفه یِ z ِ سرعتِ شاره را هم صفر میگیرم. به این ترتیب مسئله عملَن دُبُعدی ست. هدف محاسبه یِ

شکلِ مانا یِ سطحِ آزادِ شاره بر حسبِ شکلِ کفِ کانال، و البته سرعتِ افقی و ارتفاعِ آب، است. جریان ناچرخشی فرض میشود و محاسبه یِ کامل برا یِ حالت ی انجام میشود که انحرافِ کف از حالتِ افقی، و در نتیجه انحرافِ سطحِ-آزاد از حالتِ افقی، کوچک است.

1 معادلات

قانونِ دومِ نیوتُن [1] برا یِ یک شاره یِ آرمانی (بدونِ گرانروی) میشود

$$\rho\,(\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{\nabla}P - \rho\,\boldsymbol{\nabla}\,U. \tag{1}$$

$\dot{X}$ مشتقِ X نسبت به زمان است. ρ چگالی، $\boldsymbol{v}$ سرعت، P فشار، و U انرژی یِ پتانسیل بر جرم است. اینجا فقط انرژی یِ پتانسیلِ گرانشی در نظر گرفته میشود. پس U پتانسیلِ گرانشی ست. معادله یِ پیوستِگی هم میشود

$$\dot{\rho} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\,\boldsymbol{v}) = 0. \tag{2}$$

وقت ی شاره تراکم-ناپذیر است (چگالی مستقل از مکان و زمان است)، و جریان مانا ست (مشتقها یِ زمانی صفر اَند) قانونِ دومِ نیوتُن [1] و معادله یِ پیوستِگی میشوند

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla}\,\left(\frac{P}{\rho} + U\right). \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0. \tag{4}$$

جریان ناچرخشی فرض میشود، یعنی

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v} = 0. \tag{5}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}),\\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{v}, \end{aligned} \tag{6}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}). \tag{7}$$

این را در (3) میگذارم:

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{P}{\rho}+U\right)=0, \tag{8}$$

که هم ان قانون ِ برنولی [2] ست:

$$\frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{P}{\rho}+U=\text{constant}. \tag{9}$$

از (5) نتیجه میشود سرعت گرادیان ِ یک میدان ِ اسکالر است:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\nabla}\,\psi. \tag{10}$$

این را در (4) میگذارم:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\psi=0. \tag{11}$$

اینها را میشود در متنها یِ مکانیک ِ شارِها (مثلَن در [3]) یافت.

2 شرایط ِ مرزی

کانال ی را در نظر میگیرم که کف َش در $y=h$ است، که h تابع ِ x است. سطح ِ آزاد ِ شاره در $z=H+\zeta$ است، که H ثابت و ζ تابع ِ x است. سرعت ِ شاره در سطح ِ آزاد، جا یی که ζ صفر است را با V نشان میدهم. در سطح ِ آزاد، فشار برابر ِ فشار ِ جَو است، که ثابت است. (از اثر ِ کشش ِ سطحی چشم پوشیده ام.) به این ترتیب از (9) نتیجه میشود

$$\frac{1}{2}\,[\boldsymbol{v}(x,H+\zeta)]\cdot[\boldsymbol{v}(x,H+\zeta)]+g\,\zeta=\frac{1}{2}\,V^2. \tag{12}$$

از این که سرعت در کف ِ کانال بر کف ِ کانال و در سطح ِ آزاد بر سطح ِ آزاد مماس است، نتیجه میشود

$$\frac{v_2[x,h(x)]}{v_1[x,h(x)]}=(\mathrm{D}\,h)(x), \tag{13}$$

$$\frac{v_2[x,H+\zeta(x)]}{v_1[x,H+\zeta(x)]}=(\mathrm{D}\,\zeta)(x), \tag{14}$$

که شاخصها یِ 1 و 2 با جهتها یِ به ترتیب x و y متناظر َند، و D مشتقگیری ست. اسکالر ِ ϕ را چنین تعریف میکنم.

$$\boldsymbol{v}=:V\,\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\nabla}\,\phi. \tag{15}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\phi = 0. \tag{16}$$

3 خطی-سازی

وقت ی کانال تقریبَن یکنواخت است و سرعت تقریبَن $V\,\hat{\boldsymbol{x}}$ است، h و ζ و ϕ کوچک َند. برا یِ این حالت، معادلات را خطی میکنم. (12) و (13) و (14) میشوند

$$V\,(\mathrm{D}_1\,\phi)(x,H) = -g\,\zeta(x). \tag{17}$$

$$(\mathrm{D}_2\,\phi)(x,0) = V\,(\mathrm{D}\,h)(x). \tag{18}$$

$$(\mathrm{D}_2\,\phi)(x,H) = V\,(\mathrm{D}\,\zeta)(x). \tag{19}$$

D_i مشتقگیری نسبت به متغیرِ i اُم است. بر حسبِ تبدیلِ فوریه [4] یِ کمیتها یِ h و ζ و ϕ،

$$h(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\,\pi}\ \exp(\mathrm{i}\,k\,x)\,\tilde{h}(k), \tag{20}$$

$$\zeta(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\,\pi}\ \exp(\mathrm{i}\,k\,x)\,\tilde{\zeta}(k), \tag{21}$$

$$\phi(,yx) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\,\pi}\ \exp(\mathrm{i}\,k\,x)\,\tilde{\phi}(k,y), \tag{22}$$

رابطِها یِ (16) تا (19) میشوند

$$\{[(\mathrm{D}_2)^2 - k^2]\,\tilde{\phi}\}(k,y) = 0. \tag{23}$$

$$\mathrm{i}\,k\,V\,\tilde{\phi}(k,H) = -g\,\tilde{\zeta}(k). \tag{24}$$

$$(\mathrm{D}_2\,\tilde{\phi})(k,0) = \mathrm{i}\,k\,V\,\tilde{h}(k). \tag{25}$$

$$(\mathrm{D}_2\,\tilde{\phi})(k,H) = \mathrm{i}\,k\,V\,\tilde{\zeta}(k). \tag{26}$$

با اینها میشود $\tilde{\zeta}$ را بر حسبِ $\tilde{h}$ حساب کرد.

4 نتایج

از (23) نتیجه میشود

$$\tilde{\phi}(k,y) = A\,\cosh(k\,y) + B\,\cosh[k\,(H-y)]. \qquad (27)$$

این را در (25) و (26) میگذارم:

$$-B\,k\,\sinh(k\,H) = \mathrm{i}\,k\,V\,\tilde{h}(k). \qquad (28)$$

$$A\,k\,\sinh(k\,H) = \mathrm{i}\,k\,V\,\tilde{\zeta}(k). \qquad (29)$$

به این ترتیب،

$$\tilde{\phi}(k,y) = \frac{\mathrm{i}\,V\,\{\cosh(k\,y)\,\tilde{\zeta}(k) - \cosh[k\,(H-y)]\,\tilde{h}(k)\}}{\sinh(k\,H)}. \qquad (30)$$

این را در (24) میگذارم:

$$\left[-\frac{k\,V^2}{\tanh(k\,H)} + g\right]\,\tilde{\zeta}(k) + \frac{k\,V^2}{\sinh(k\,H)}\,\tilde{h}(k) = 0. \qquad (31)$$

به این ترتیب،

$$\left[\cosh(k\,H) - \frac{g\,H}{V^2}\,\frac{\sinh(k\,H)}{k\,H}\right]\,\tilde{\zeta}(k) = \tilde{h}(k). \qquad (32)$$

جواب ِ معادله یِ

$$f(k)\,\tilde{\zeta}(k) = \tilde{h}(k), \qquad (33)$$

میشود

$$\tilde{\zeta}(k) = \mathrm{pf}\left[\frac{\tilde{h}(k)}{f(k)}\right] + \sum_i a_i\,\delta(k-k_i), \qquad (34)$$

که a_i ها ثابتها یی دلبخاه َند و k_i ها صفرها یِ f َند:

$$f(k_i) = 0. \qquad (35)$$

جمله یِ دوم در (34)، جواب ِ معادله یِ همگن است. برا یِ معادله یِ (32)،

$$f(k) = \cosh(k\,H) - \frac{g\,H}{V^2}\,\frac{\sinh(k\,H)}{k\,H}. \qquad (36)$$

در این صورت،

$$\tilde{\zeta}(k) = \mathrm{pf}\left[\frac{\tilde{h}(k)}{\cosh(k\,H) - \dfrac{g\,H}{V^2}\,\dfrac{\sinh(k\,H)}{k\,H}}\right] + a\,\delta(k-k_0) + b\,\delta(k+k_0), \qquad (37)$$

که a و b ثابتها یی دلبخاه َند و

$$\cosh(k_0\,H)-\frac{g\,H}{V^2}\,\frac{\sinh(k_0\,H)}{k_0\,H}=0. \tag{38}$$

البته این معادله فقط وقت ی جواب دارد که

$$|V|\le V_{\rm c}, \tag{39}$$

که

$$V_{\rm c}=\sqrt{g\,H}. \tag{40}$$

معادله یِ پاشندِگی برا یِ امواج ِ گرانی

$$\omega^2(k)=g\,k\,\tanh(k\,H) \tag{41}$$

است، که ω بسامد ِ زاویِئی یِ مُج و عدد ِ مُج است (مثلَن فصل ِ 1 از [3]). به این ترتیب برا یِ $v(k)$ (سرعت ِ فاز) نتیجه میشود.

$$v^2(k)=g\,H\,\frac{\tanh(k\,H)}{k\,H}. \tag{42}$$

دیده میشود

$$v(k)<\sqrt{g\,H}. \tag{43}$$

به این ترتیب، (38) این است که V با $v(k_0)$ برابر باشد، و (39) این که k_0 ی باشد که V با $v(k_0)$ برابر باشد. جواب ِ مانا، متناظر با شکل ی ست که نسبت به شاره با سرعت ِ V حرکت میکند. چنین جواب ی بدون ِ تحریک ِ بیرونی (افت-ُ-خیز ِ کف ِ کانال) ممکن است اگر و تنها اگر عدد-ِ-مُج ِ آن متناظر با سرعت-ِ-فاز ی برابر ِ V باشد. این عدد-ِ-مُج k_0 است، و جملِها یِ دوم و سوم در (37) جوابها یِ متناظر با این عدد-ِ-مُج َند.

جمله یِ اول در (37) هم بستِگی یِ شکل ِ سطح ِ آزاد به شکل ِ کف ِ کانال را نشان میدهد. از جمله دیده میشود وقت ی V صفر است، این جمله صفر میشود، یعنی سطح ِ آزاد افقی میمانَد.

5 پانوشتها

[1] Newton

[2] Bernoulli

[3] L. D. Landau & E. M. Lifshitz; "Fluid mechanics" 2nd edition (Pergamon PressJohn Wiley & Sons, 1989)

[4] Fourier