X1-107 (2015/04/30)

نقشِها یِ تخت ِ زاویه-نگهدار و مساحت-نگهدار ِ کره

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

دُ دسته نقشه یِ تخت از کره بررسی میشود، که هر دسته شامل ِ یک نقشه یِ زاویه-نگهدار و یک نقشه یِ مساحت-نگهدار است.

0 درامد

کره تخت نیست. به هم ین خاطر هیچ نقشه ای از کره که رو یِ یک سطح ِ تخت (مثلَن صفحه یا استوانه) بیفتد طول-نگهدار نیست. اما نقشِها یِ تخت ی هستند که زاویه-نگهدار َند. نقشه یِ مِرکاتُر [1] کره (جز دُ نقطه یِ متقاطر، مثلَن قطبها یِ شمال و جنوب) را به یک استوانه مینگارد. نقشه یِ گُنجنِگاری کره (جز یک نقطه، مثلَن قطب ِ جنوب) را به یک صفحه مینگارَد. هردُ یِ این نقشِها زاویه-نگهدار َند. یک نقشه یِ زاویه-نگهدار شکل ِ ناحیِها یِ کوچک را حفظ میکند: هر ناحیه یِ کوچک را به ناحیه ای متشابه با آن مینگارد، اما نسبت ِ مساحت ِ ناحیِها یِ دور از هم را بهم میزند. یک مثال ِ مشهور این است که در نقشه یِ مِرکاتُر [1] ِ زمین مساحت ِ ظاهری یِ گْرینلَند با مساحت ِ ظاهری یِ آفریقا برابر

است. اما بر سطح ِ زمین مساحت ِ آفریقا 14 برابر ِ مساحت ِ گْرینلَند است. نقشِها یِ مساحت-نگهدار این مشکل را ندارند. اما زاویه را حفظ نمیکنند و شکل ِ ناحیِها را به هم میزنند.

$\mathrm{d}s$ (عنصر ِ طول) در یک ناحیه چنین است.

$$\mathrm{d}s^2 = g_{i\,j}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j, \tag{1}$$

که x^k ها مختصات َند و g متریک است، که در حالت ِ کلی مئلفِها یَش به مکان بستِگی دارد. $\mathrm{d}A$ (عنصر ِ مساحت) چنین است.

$$\mathrm{d}A = \sqrt{|\mathfrak{D}(g)|}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2, \tag{2}$$

که $\mathfrak{D}(g)$ دترمینان ِ ماتریس ی ست که مئلفِها یَش مئلفِها یِ g اند. البته عنصر ِ مساحت برا یِ ناحیِها یِ 2 بُعدی تعریف میشود. اگر بُعد n نباشد حجم ِ n بُعدی تعریف میشود، که مشابه با طرف ِ راست ِ (2) با $(\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n)$ به جا یِ $(\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2)$ است.

تابع ِ F یک ناحیه را به ناحیه ای دیگر مینگارد:

$$x'^a = F^a(x), \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s'^2 &= g'_{a\,b}\,\mathrm{d}x'^a\,\mathrm{d}x'^b,\\ &= \tilde{g}_{i\,j}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j,\end{aligned} \tag{4}$$

که متغیرها یِ پریمدار مال ِ ناحیه یِ مقصد َند، و

$$\tilde{g}_{i\,j}(x) = \{g'_{a\,b}[F(x)]\}\,[(\partial_i F^a)(x)]\,[(\partial_j F^b)(x)]. \tag{5}$$

رُشن است که

$$\mathrm{d}A' = \sqrt{|\mathfrak{D}(\tilde{g})|}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2. \tag{6}$$

F زاویه-نگهدار است، اگر $\mathrm{d}s'^2$ با $\mathrm{d}s^2$ متناسب باشد (با ضریب ی که احتمالَن تابع ِ x است). یعنی

$$\tilde{g}_{i\,j} = \Lambda\,g_{i\,j}. \tag{7}$$

F مساحت-نگهدار است، اگر $\mathrm{d}A'$ با $\mathrm{d}A$ برابر باشد. یعنی

$$\mathfrak{D}(\tilde{g}) = \mathfrak{D}(g). \tag{8}$$

کره را با بخش ِ زاویئی یِ مختصات ِ کروی پارامتری میکنم، یعنی مختصات را (θ, ϕ) میگیرم، که θ متمم ِ عرض ِ جغرافیایی و ϕ طول ِ جغرافیایی ست. به جا یِ θ خُد ِ عرض ِ جغرافیایی هم به کار میرود، که آن را با λ نشان میدهم:

$$\lambda + \theta = \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

قطب ِ شمال $\theta = 0$ یا $\lambda = (\pi/2)$، قطب ِ جنوب $\theta = \pi$ یا $\lambda = -(\pi/2)$، و استوا $\theta = (\pi/2)$ یا $\lambda = 0$ است. مدارها دایرِها یِ θ-ثابت (λ-ثابت) َند. نصف‌النهارها نیمدایرِها یِ ϕ-ثابت َند. $\mathrm{d}s_\mathrm{s}$ (عنصر ِ طول بر کره) چنین است.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_\mathrm{s}^2 &= \mathrm{d}\theta^2 + (\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\phi^2, \\ &= (\cos^2\lambda)\,\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}\lambda^2. \end{aligned} \tag{10}$$

شعاع ِ کره را یک گرفته ام. $\mathrm{d}A_\mathrm{s}$ (عنصر ِ مساحت بر کره) هم میشود

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_\mathrm{s} &= (\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi, \\ &= (\cos\lambda)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\lambda. \end{aligned} \tag{11}$$

1 نگاشتن ِ کره به استوانه

یک راه ِ نگاشتن ِ کره به یک سطح ِ تخت، نگاشتن ِ کره به یک استوانه یِ دوار است. استوانه را با مختصات ِ (α, z) پارامتری میکنم، که α مختصه یِ سمتی و z مختصه یِ ارتفاع (در راستا یِ محور ِ استوانه) است. $\mathrm{d}s_\mathrm{c}$ (عنصر ِ طول بر استوانه) چنین است.

$$\mathrm{d}s_\mathrm{c}^2 = \mathrm{d}\alpha^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{12}$$

شعاع ِ استوانه را یک گرفته ام. یک شکل ِ معمول ِ نگاشتن ِ کره به استوانه این است که مدارها یِ کره، که دایرِها یی با شعاعها یِ متفاوت َند، به دایرِها یی با شعاعها یِ یکسان (دایرِها یِ عمود بر محور ِ استوانه)، و نصف‌النهارها یِ کره به خطها یی موازی با محور ِ استوانه نگاشته میشوند:

$$\alpha = \phi. \tag{13}$$

$$z = f(\lambda). \tag{14}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{c}}^2 = \mathrm{d}\phi^2 + [f'(\lambda)]^2\,\mathrm{d}\lambda^2. \tag{15}$$

$\mathrm{d}A_{\mathrm{c}}$ (عنصر ِ مساحت بر استوانه) هم میشود

$$\mathrm{d}A_{\mathrm{c}} = [f'(\lambda)]\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\lambda. \tag{16}$$

f' را مثبت گرفته ام، که یعنی z نسبت به λ صعودی ست.

1.1 نگاشتن ِ زاویه-نگهدار ِ کره به استوانه

از (7) دیده میشود تابع ی که با (13) و (14) تعریف میشود زاویه-نگهدار است، اگر

$$f'(\lambda) = \frac{1}{\cos\lambda}. \tag{17}$$

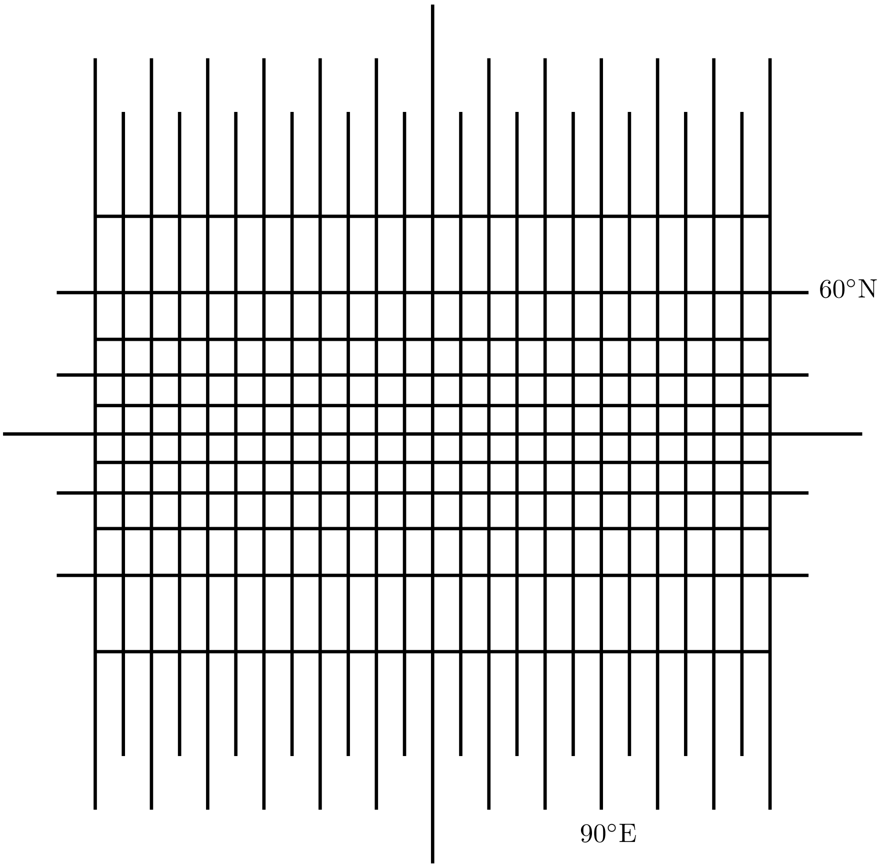
به این ترتیب،

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \tanh^{-1}(\sin\lambda), \\ &= \frac{1}{2}\,\ln\frac{1+\sin\lambda}{1-\sin\lambda}. \end{aligned} \tag{18}$$

ثابت ِ جمعی را چنان گرفته ام که z و λ با هم صفر شوند. به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_{\mathrm{c}}^2 &= \mathrm{d}\phi^2 + \frac{\mathrm{d}\lambda^2}{\cos^2\lambda}, \\ &= \frac{1}{\cos^2\lambda}\,\mathrm{d}s_{\mathrm{s}}^2. \end{aligned} \tag{19}$$

به این نقشه که با (13) و (14) و (18) تعریف شده نقشه یِ مِرکاتُر [1] میگویند. با این نقشه نصف‌النهارها (راستاها یِ شمال-جنوب) به خطها یی موازی با محور ِ استوانه نگاشته میشوند. چون این نقشه زاویه-نگهدار است، اگر یک خم بر کره با همه یِ نصف‌النهارها زاویه یِ ثابت بسازد، تصویر ِ آن خم بر استوانه هم با خطها یِ موازی با محور ِ استوانه هم ان زاویه یِ ثابت را میسازد. خم ی که با مجموعه یِ همه یِ خطها یِ موازی با یک راستا زاویه یِ ثابت میسازد، یک خط ِ راست است. پس در نقشه یِ مِرکاتُر [1] خطها یِ راست خمها یِ جهت-ثابت (با زاویه یِ ثابت نسبت به مثلَن شمال) اند.



شکل ِ 1 نقشه یِ مِرکاتُر. خطها یِ عمودی نصف‌النهار و خطها یِ افقی مدار َند. نصف‌النهارها و مدارها با فواصل ِ $15°$ کشیده شده اند.

1.2 نگاشتن ِ مساحت-نگهدار ِ کره به استوانه

از (8) دیده میشود تابع ی که با (13) و (14) تعریف میشود مساحت-نگهدار است، اگر

$$f'(\lambda) = \cos\lambda. \tag{20}$$

به این ترتیب،

$$f(\lambda) = \sin\lambda. \tag{21}$$

ثابت ِ جمعی را چنان گرفته ام که z و λ با هم صفر شوند.

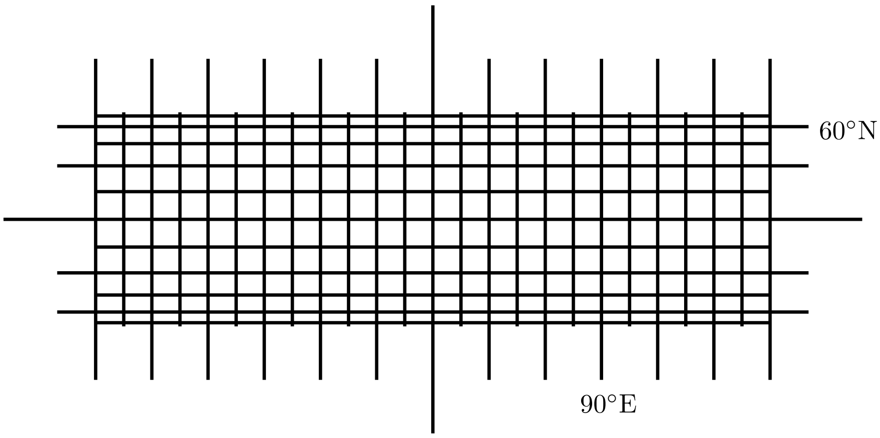
البته رُشن است که میشود z را بازمقیاس کرد و مساحت در نقشه مضرب ِ ثابت ی از مساحت در کره باشد (و خطها یِ عمودی و افقی، به ترتیب، نصف‌النهار و مدار باشند). مثلَن

$$z = \frac{\lambda}{\sin \lambda_0}. \tag{22}$$

در این حالت

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{c}}^2 = \frac{1}{\sin^2 \lambda_0}\,[(\sin^2 \lambda_0)\,\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}\lambda^2], \tag{23}$$

که نشان میدهد در $\lambda = \lambda_0$ عنصر- ِ-طول بر استوانه با عنصر- ِ-طول بر کره متناسب است.



شکل ِ 2 نقشه یِ استوانِئی یِ مساحت-نگهدار. خطها یِ عمودی نصف‌النهار و خطها یِ افقی مدار َند. نصف‌النهارها و مدارها با فواصل ِ $15°$ کشیده شده اند.

2 نگاشتن ِ کره به صفحه

یک راه ِ نگاشتن ِ کره به یک سطح ِ تخت، نگاشتن ِ کره به یک صفحه است. صفحه را با مختصات ِ قطبی یِ (ρ, α) پارامتری میکنم. $\mathrm{d}s_{\mathrm{p}}$ (عنصر ِ طول بر صفحه) چنین است.

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{p}}^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\alpha^2. \tag{24}$$

یک شکل ِ معمول ِ نگاشتن ِ کره به صفحه این است که مدارها ی ِ کره به دایره‌ها یی هم‌مرکز (به مرکز ِ مبدئ)، و نصف‌النهارها ی ِ کره به نیم‌خط‌ها یی که از مبدئ شروع می‌شوند نگاشته می‌شوند:

$$\alpha = \phi. \tag{13}$$

$$\rho = h(\theta). \tag{25}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{p}}^2 = [h'(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta^2 + [h(\theta)]^2\,\mathrm{d}\phi^2. \tag{26}$$

$\mathrm{d}A_{\mathrm{p}}$ (عنصر ِ مساحت بر صفحه) هم می‌شود

$$\mathrm{d}A_{\mathrm{p}} = [h'(\theta)]\,[h(\theta)]\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi. \tag{27}$$

h' را مثبت گرفته ام، که یعنی ρ نسبت به θ صعودی ست.

2.1 نگاشتن ِ زاویه-نگهدار ِ کره به صفحه

از (7) دیده می‌شود تابع ی که با (13) و (25) تعریف می‌شود زاویه-نگهدار است، اگر

$$\frac{h'(\theta)}{h(\theta)} = \frac{1}{\sin\theta}. \tag{28}$$

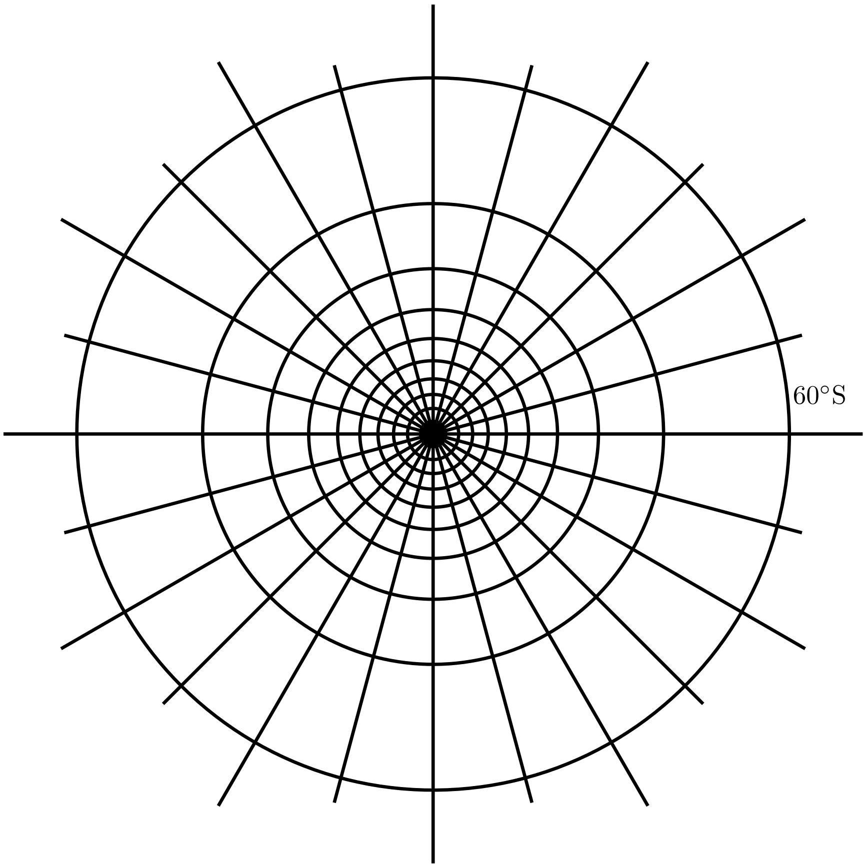
به این ترتیب،

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \tan\frac{\theta}{2}, \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right). \end{aligned} \tag{29}$$

ثابت ِ جمعی را چنان گرفته ام که ρ و θ با هم صفر شوند. به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_{\mathrm{p}}^2 &= \frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta^2 + \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\phi^2, \\ &= \frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}s_{\mathrm{s}}^2. \end{aligned} \tag{30}$$

به این نقشه که با (13) و (25) و (29) تعریف شده نقشه ی ِ گُنج‌نِگاری [2] می‌گویند.



شکل ِ 3 نقشه ی ِگُنجنِگاری. نیمخطها نصف‌النهار و دایره‌ها مدار َند. نصف‌النهارها و مدارها با فواصل ِ $15°$ کشیده اند.

2.2 نگاشتن ِمساحت-نگهدار ِ کره به صفحه

از (8) دیده میشود تابع ی که با (13) و (25) تعریف میشود مساحت-نگهدار است، اگر

$$[h(\theta)]\,[h'(\theta)] = \sin\theta. \tag{31}$$

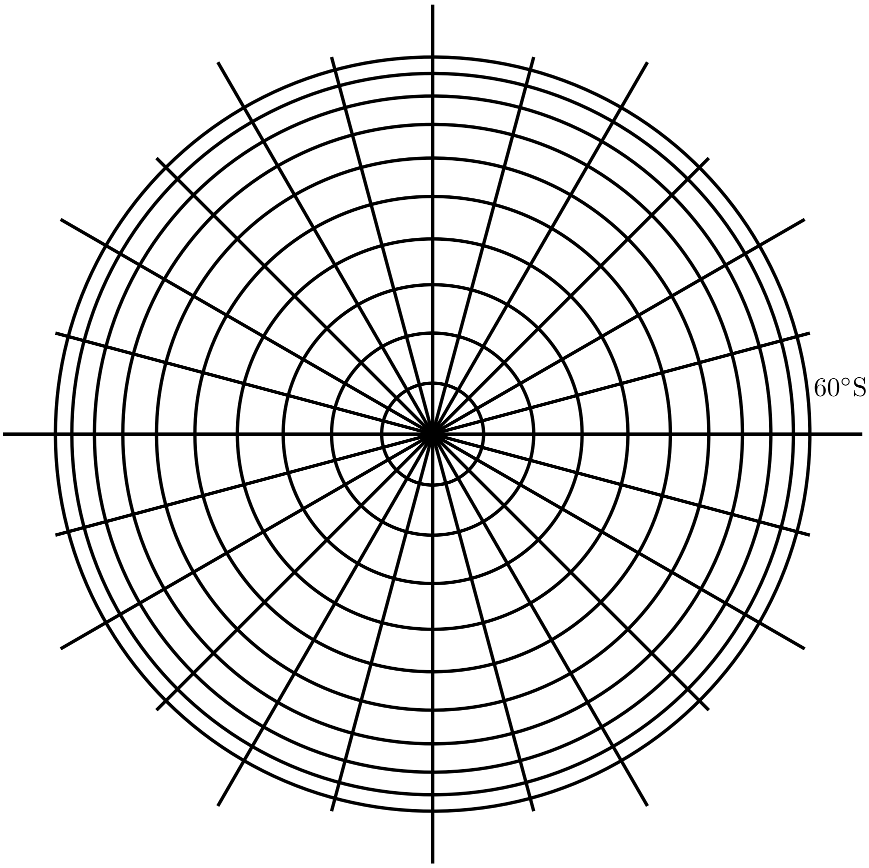
به این ترتیب،

$$h(\theta) = 2\,\sin\frac{\theta}{2}. \tag{32}$$

ثابت ِ جمعی را چنان گرفته ام که ρ و θ با هم صفر شوند. به این ترتیب،

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{p}}^2 = \frac{1+\cos\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta^2 + \frac{2\,\sin^2\theta}{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\phi^2, \tag{33}$$

که نشان میدهد در $\theta = 0$ عنصر- ِ-طول بر صفحه با عنصر- ِ-طول بر کره برابر است.



شکل ِ 4 نقشه یِ صفحِیِ یِ مساحت-نگهدار. نیمخطها نصف‌النهار و دایرِها مدار َند. نصف‌النهارها و مدارها با فواصل ِ 15° کشیده شده اند.

3 پانوشتها

[1] Mercator

[2] stereographic