X1-108 (2015/05/29)

یک میله یِ رسانا یِ باردار ِ باپایان

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

با استفاده از مختصات ِ بیضوی، پتانسیل ِ الکتریکی و چگالی یِ بار برا یِ یک میله یِ رسانا یِ باردار ِ باپایان به دست میئاید.

0 درامد

یک مجموعه یِ یک- (یا کمتر-) بُعدی یِ $\mathbb{S}$ که پتانسیل ِ الکتریکی یِ معین (و باپایان) داشته باشد، در پتانسیل ِ الکتریکی یِ بقیه یِ فضا اثر ی ندارد. علت این است که اگر $\mathbb{S}$ بار داشته باشد، پتانسیل ِ الکتریکی بر آن بیپایان میشود. پس اگر پتانسیل ِ الکتریکی بر $\mathbb{S}$ باپایان است، (چگالی یِ) بار بر $\mathbb{S}$ صفر است.

پس یک خم که پتانسیل ِ الکتریکی بر آن مشخص است، فقط وقت ی شرط ِ مرزی یِ اثرگذار ی میسازد که این پتانسیل ِ الکتریکی بیپایان باشد. از جمله، یک میله یِ باپایان ِ رسانا فقط وقت ی میدان ِ الکتریکی میسازد که به پتانسیل ِ الکتریکی یِ بینهایت وصل شود. وقت ی پتانسیل ِ الکتریکی بر میله بینهایت است، این که میله رسانا ست (پتانسیل بر آن ثابت است) خُش-تعریف نیست. یک راه ِ بررسی یِ مسئله این است که به جا یِ میله یک رسانا یِ نازک به کار رود، که پتانسیل بر آن بزرگ (و

ثابت) است. این رسانا ی ِ کمکی را میشود به شکلها ی ِ مختلف ی گرفت، که حالت ِ حدی ِ یشان میله باشد، از جمله میشود آن را یک بیضیگون ِ دوار ِ کشیده گرفت. چنین جسم ی تقارن ِ سمتی ی ِ میله را دارد، میله حالت ِ حدی ی ِ آن است، و این مزیت هم هست که پتانسیل ِ الکتریکی برا ی ِ مسئله ای با این هندسه را میشود با مختصات ِ بیضوی بررسی کرد.

1 مختصات ِ بیضوی

چنان که در [1] و [2] هم آمده، مختصات ِ بیضوی ی ِ نُع ِ دوم (s, ϕ, t) از رو ی ِ مختصات ِ استوانِئی ی ِ (ρ, ϕ, z) چنین تعریف میشوند.

$$
\begin{aligned}
\rho &= c\,\sinh s\,\sin t, \\
z &= c\,\cosh s\,\cos t. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

گستره ی ِ (s, t) را میشود $\{[0, \infty) \times [0, \pi]\}$ گرفت. هر یک از رویِها ی ِ $s = \text{constant}$ یک بیضیگون ِ دوار ِ کشیده، و هر یک از رویِها ی ِ $t = \text{constant}$ نیم ی از یک هذلولیگون ِ دوار ِ دُپارچه است. $s = 0$ پارِخط ی به طول ِ $(2\,c)$ بر محور ِ z است، که وسط َش مبدئ است. لَپلَسی بر حسب ِ مختصات ِ بیضوی میشود

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 = &\frac{1}{E^2(s,t)}\,\left(\frac{1}{\sinh s}\,\frac{\partial}{\partial s}\,\sinh s\,\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{\sin t}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\sin t\,\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&+ \frac{1}{c^2\,\sinh^2 s\,\sin^2 t}\,\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

که

$$
\begin{aligned}
E^2(s,t) := &c^2\,(\sinh^2 s + \sin^2 t), \\
= &c^2\,(\cosh^2 s - \cos^2 t). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

2 رسانا یی به شکل ِ یک بیضیگون ِ دوار ِ کشیده

گیرم رسانا یی به شکل ِ یک بیضیگون ِ دوار ِ کشیده بار ِ Q دارد. مسئله یِ شرایط- ِ-مرزی برا یِ بیرون ِ این رسانا میشود این که ψ (پتانسیل ِ الکتریکی) بیرون ِ این رسانا معادله یِ لَپلَس [3] را بر میئاورَد، در بینهایت صفر میشود، و بر این رسانا مقدار ِ ثابت ِ V است . البته مقدار ِ ثابت ِ V معلوم نیست و باید از رو یِ Q تعیین شود. محورها را چنان میگیرم که سطح ِ رسانا متناظر با $s = s_0$ در مختصات ِ بیضوی باشد. به این ترتیب $(2\,c)$ فاصله یِ کانونی یِ بیضیگون و $(2\,a)$ قطر ِ بزرگ ِ بیضیگون است، یا e خروج-از-مرکز ِ بیضیگون است، چنان که

$$\begin{aligned}\cosh s_0 &= \frac{a}{c},\\ &= \frac{1}{e}.\end{aligned} \tag{4}$$

به سادِگی دیده میشود پتانسیل ی که تابع ِ فقط s باشد هست که معادله یِ لَپلَس [1] و شرایط ِ مرزی را براورَد:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sinh s\,\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}\right) = 0. \tag{5}$$

$$\lim_{s\to\infty} \psi(s) = 0. \tag{6}$$

$$\psi(s = s_0) = V. \tag{7}$$

جواب ِ (5) و (6) میشود

$$\psi = A\,\ln\frac{\cosh s + 1}{\cosh s - 1}, \tag{8}$$

که A یک ثابت است. این ثابت را میشود از (7) حساب کرد:

$$\begin{aligned}A &= \left(\ln\frac{\cosh s_0 + 1}{\cosh s_0 - 1}\right)^{-1}\,V,\\ &= \left(\ln\frac{1+e}{1-e}\right)^{-1}\,V.\end{aligned} \tag{9}$$

خُد ِ V باید از رو یِ Q تعیین شود. یک راه بررسی یِ پتانسیل دور از رسانا ست. دور از رسانا، s و در نتیجه $\cosh s$ بزرگ است و

$$\frac{r}{\cosh s} = c + \cdots\,, \tag{10}$$

که r فاصله تا مبدئ است. پس،

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{2\,A}{\cosh s} + \cdots\,,\\ &= \frac{2\,A\,c}{r} + \cdots\,.\end{aligned} \tag{11}$$

دور از رسانا ضمنَن،

$$\psi = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} + \cdots\,. \tag{12}$$

به این ترتیب،

$$A = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,c}. \tag{13}$$

از اینجا،

$$\psi = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,c}\,\ln\frac{\cosh s + 1}{\cosh s - 1}. \tag{14}$$

$$V = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,c}\,\ln\frac{1 + e}{1 - e}. \tag{15}$$

3 چگالی ی ِ بار

σ (چگالی ی ِ سطحی ی ِ بار بر رسانا) چنین است.

$$\sigma = -\varepsilon_0\,\boldsymbol{\nabla}_{\hat{\boldsymbol{n}}}\psi, \tag{16}$$

که $\hat{\boldsymbol{n}}$ بردار ِ یکه ی ِ عمود بر سطح ِ رسانا به سو ی ِ بیرون است. اینجا،

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\right|^{-1}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}, \tag{17}$$

که $\boldsymbol{r}$ بردار ِ مکان است. به این ترتیب،

$$\sigma = -\varepsilon_0\,\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\right|^{-1}\,\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}. \tag{18}$$

این به کار رفته که ψ تابع ِ فقط s است. پس به جا ی ِ مشتق ِ پارِئی مشتق ِ تابع ِ یک-متغیره نوشته شده. از (1) دیده میشود

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} = c\,(\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\cosh s\,\sin t + \hat{\boldsymbol{z}}\,\sinh s\,\cos t), \tag{19}$$

که $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ و $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ و $\hat{\boldsymbol{z}}$ بردارها یِ پایه یِ یکه در مختصات ِ استوانئی یَند. به این ترتیب،

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\right| = [c^2\,(\cosh^2 s\,\sin^2 t + \sinh^2 s\,\cos^2 t)]^{1/2}, \\ = c\,E(s,t). \tag{20}$$

پس،

$$\sigma(t) = \varepsilon_0\,\frac{1}{E(s_0,t)}\,\frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,c}\,\frac{1}{\sinh s_0}, \\ = \frac{Q}{4\,\pi\,c^2\,E(s_0,t)\,\sinh s_0}. \tag{21}$$

رابطه یِ $\mathrm{d}S$ (عنصر ِ مساحت) بر رویه یِ $s = s_0$ با مختصات ِ (ϕ, t) چنین است.

$$\mathrm{d}S = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right|\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}t, \\ = |\rho\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\times[c\,(\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\sinh s_0\,\cos t - \hat{\boldsymbol{z}}\,\cosh s_0\,\sin t)]|\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}t, \\ = (c\,\sinh s_0\,\sin t)\,[c\,E(s_0,t)]\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}t. \tag{22}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{d}Q = \sigma\,\mathrm{d}S, \\ = \frac{Q\,\sin t}{4\,\pi}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}t. \tag{23}$$

از این بر ϕ انتگرال میگیرم. حاصل بار در ناحیه ای ست که گستره اَش بر حسب ِ t برابر با $\mathrm{d}t$ است:

$$\mathrm{d}Q = \frac{Q\,\sin t}{2}\,\mathrm{d}t. \tag{24}$$

این را میشود بر حسب ِ z (به جا یِ t) هم نوشت. بر رویه یِ $s = s_0$،

$$\mathrm{d}z = -c\,\cosh s_0\,\sin t\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{d}Q = \frac{Q}{2\,c\,\cosh s_0}\,\mathrm{d}z, \tag{26}$$

که با استفاده از (4) میشود

$$\mathrm{d}Q = \frac{Q}{2\,a}\,\mathrm{d}z, \tag{27}$$

یا

$$\lambda_z = \frac{Q}{2\,a}, \tag{28}$$

که λ_z چگالی یِ طولی یِ بار نسبت به z است: بار ِ بین ِ دُ صفحه یِ عمود بر محور ِ z، به فاصله یِ $\mathrm{d}z$ از هم $\lambda_z\,\mathrm{d}z$ است. دیده میشود این چگالی یکنواخت است. چگالی یِ سطحی یِ بار یکنواخت نیست و با کاهش ِ $\sin t$ زیاد میشود. بیشینه یِ چگالی یِ سطحی در رئسها یِ بیضیگون ِ کشیده رخ میدهد، چنان که انتظار میرفت.

4 میله

میله حالت ِ حدی یِ بیضیگون ِ کشیده است، که s_0 به صفر میگراید. در این حالت چگالی یِ سطحی یِ بار بینهایت میشود، چنان که انتظار میرفت، چون بار بر یک ناحیه یِ یک-بُعدی تُزیع شده. اما نسبت ِ چگالی یِ سطحی به چگالی یِ سطحی در مثلَن $z = 0$ باپایان میماند. چگالی یِ طولی هم همچنان یکنواخت است:

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma(\pi/2)} = \frac{1}{\sin t}. \tag{29}$$

$$\lambda_z = \frac{Q}{2\,c}. \tag{30}$$

این که پتانسیل ِ میله ثابت باشد خُش-تعریف نیست، چون V در (15) بینهایت میشود. اما میشود $\mathcal{E}$ (تصویر ِ میدان ِ الکتریکی بر محور ِ z) را حساب، و رفتار ِ حدی یِ آن را بررسی کرد:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi,\\ &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}},\\ &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\frac{c\,\sinh s_0\,\cos t}{c\,E(s_0,t)},\end{aligned} \tag{31}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathcal{E} = \frac{Q\,\cos t}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,c^2\,[E(s_0,t)]^2}. \tag{32}$$

برا یِ میله،

$$\mathcal{E} = \frac{Q\,\cos t}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,c^2\,\sin^2 t}, \\ = \frac{Q\,z}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,c\,(c^2 - z^2)}. \tag{33}$$

دیده میشود این میدان جز وسطِ میله صفر نیست، حتا در سرها یِ میله بینهایت میشود. این نتیجه را مستقیم هم میشد به دست آورد. در نقطه ای به مختصه یِ z بر میله، میدانِ حاصل از بخش ی از میله که بر $[-c + 2\,z, c]$ است صفر است، چون چگالی یِ طولی یِ بار یکنواخت است و این نقطه وسطِ آن بخش از میله است. پس

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda_z}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\int_{-c}^{-c+2\,z}\frac{\mathrm{d}z'}{(z - z')^2}. \tag{34}$$

این رابطه برا یِ z ها یِ منفی هم درست است. در آن حالت کافی ست ناحیه یِ $[-c + 2\,z, -c]$ را که بار ندارد شاملِ دُ چگالی-یِ-بارِ λ_z و $(-\lambda_z)$ در نظر بگیرم. دیده میشود (34) هم ان (33) است.

نتیجه این که این شرط-ِ-مرزی که بخشِ مماس-بر-میله یِ میدانِ الکتریکی صفر باشد جواب ندارد. دست-ِ-بالا میشود این بخش را باپایان کرد، که چون میدانِ الکتریکی بر میله بینهایت است، یعنی میدانِ الکتریکی بر میله عمود است.

5 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «مختصاتِ بیضوی در چند مسئله یِ الکترُمغناطیس»؛ X1-010 (2002/04/17)

[2] محمد خرمی؛ «بیضیگونِ دوارِ توپرِ یکنواخت-باردار»؛ X1-035 (2006/01/08)

[3] Laplace