X1-111 (2015/10/30)

کنش ِ تقریبی برا یِ برهمکنش ِ ذرات ِ باردار

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

ذرات ِ بررسی میشوند که فقط از طریق ِ میدان ِ الکترُمغناطیسی یِ حاصل از یکدیگر با هم برهمکنش دارند. برا یِ چنین سیستم ی، تا مرتبه یِ عکس ِ مجذور ِ سرعت ِ نور میشود یک کنش ِ مئثر نوشت که شامل ِ فقط ذرات است (میدانها در آن حذف شده اند). روش ی برا یِ محاسبه یِ این کنش ارائه میشود، که بر اساس ِ خیزاندن ِ سیستم از حالت ی ست که در آن یک ذره ساکن است.

0 درامد

یک کنش ِ مُضعی که شامل ِ فقط ذرات (نَ میدانها) باشد، به یک دسته معادله یِ دیفرانسیل برا یِ ذرات مینجامد. اگر ذرات با هم برهمکنش داشته باشند، این معادلات جفت-شده اند. جز در حالت ی که برهمکنش نقطِی ست (ذرات فقط در فاصله یِ صفر از هم بر هم اثر دارند)، چنین معادلات ی با نسبیت ناسازگار َند، چون در مثلَن معادله یِ حرکت ِ ذره یِ 1 در زمان ِ t حالت ِ ذره یِ 2 در هم ان زمان ظاهر میشود، در حال ی که ذره یِ 2 با ذره یِ 1 فاصله دارد. وقت ی ذره یِ 2 با ذره یِ 1 فاصله دارد، رویداد ِ متناظر با ذره یِ 2 در زمان ِ t نسبت به رویداد ِ متناظر با ذره یِ 1 در هم ان زمان فضاگونه

است (دُ-رویداد همزمان َند ولی هم-مکان نیستند). به این ترتیب رویداد ِ متناظر با ذره یِ 2 در زمان ِ t نباید بر رویداد ِ متناظر با ذره یِ 1 در زمان ِ t اثر بگذارد.

نتیجه این است که در حالت ِ کلی کنش ی که برا یِ ذرات ِ برهمکنشدار نوشته میشود، اگر بنا باشد مُضعی باشد باید شامل ِ میدان هم باشد: میدانها را نمیشود از کنش حذف کرد. اگر میدان از کنش حذف شود، انتظار میرود کنش ی برا یِ ذرات به دست آید که در زمان نامُضعی ست: معادله یِ حرکت ِ ذره یِ 1 در زمان ِ t شامل ِ وضعیت ِ ذره یِ 2 در یک زمان ِ پیشتر است.

اگر انحراف ِ جهانخطها یِ ذرات از خط ِ راست کم باشد، بخشها یِ کوچک ی از جهانخطها را میشود با خط ِ راست تقریب کرد و بخش ی از جهانخط ِ ذره یِ 2 که متناظر با زمانها یِ پیش از t است و در حرکت ِ ذره یِ 1 در زمان ِ t اثر دارد، بر حسب ِ مکان و سرعت ِ ذره یِ 2 در زمان ِ t تعیین میشود. با این تقریب، معادلات ِ حرکت مُضعی میشوند. پس شاید کنش ی باشد که شامل ِ فقط ذرات باشد، مُضعی باشد، و برهمکنش ِ ذرات را در تقریب ِ انحراف ِ کم ِ جهانخط از خط ِ راست تُصیف کند. در فصل ِ 12 از [1] چنین کنش ی برا یِ برهمکنش ِ ذرات ِ باردار با هم به دست آمده است. اینجا هدف این است که هم ین کنش با خیزاندن ِ ذرات ِ باردار از حالت ِ سکون به دست آید.

1 کنش ِ یک ذره یِ باردار در میدان ِ یک ذره یِ باردار ِ دیگر

دُ ذره یِ باردار ِ 1 و 2 را میگیرم. بار و جرم و مکان و سرعت و و شتاب برا یِ ذره یِ i را با، به ترتیب، q_i و m_i و $\boldsymbol{r}_i$ و $\boldsymbol{v}_i$ و $\boldsymbol{a}_i$ نشان میدهم. زمان را با t نشان میدهم و

$$k = K\,q_1\,q_2. \tag{1}$$

K ثابت ِ نیرو یِ الکتریکی ست. بخش ِ برهمکنش ِ کنش ی که معادله یِ حرکت برا یِ ذره یِ باردار ِ 2 را میدهد را با S_{I} نشان میدهم.

1.1 ذره یِ اول ساکن است

در این حالت

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{I}} = -\frac{k}{|\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{r}_1|}\,\mathrm{d}t + o(c^{-2}). \tag{2}$$

البته این کنش کند-شدن ِ ذره ی ِ2 در اثر ِ شتاب را نمیدهد. توان ی که ذره ی ِ2 در اثر ِ شتاب َش از دست میدهد

$$P = \frac{2}{3}\,\frac{K\,q_2^2}{c^3}\,\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_2 \tag{3}$$

است (مثلَن فصل ِ 14 از [1])، که تا مرتبه ی ِ c^{-2} صفر است. هدف محاسبه ی ِ کنش تا مرتبه ی ِ c^{-2} است. پس میشود از خُد-نیرو ی ِ وارد بر ذره ی ِ2 به خاطر ِ شتاب َش چشم پوشید.

1.2 ذره ی ِ اول با سرعت ِ ثابت حرکت میکند

S_{I} در این حالت را میشود با خیزاندن ِ مجموعه از حالت ی که ذره ی ِ اول ساکن است به دست آورد. سرعت ِ متناظر با خیز هم ان سرعت ِ ذره ی ِ1 پس از خیز است. کمیتها ی ِ خیزیده را با پریم نشان میدهم:

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{I}} = \mathrm{d}S'_{\mathrm{I}}. \tag{4}$$

$$\boldsymbol{r}_i = \gamma'_1\,(\boldsymbol{r}'_{i\,\parallel} - \boldsymbol{v}'_1\,t') + \boldsymbol{r}'_{i\,\perp}. \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}t &= \gamma'_1\,(\mathrm{d}t' - c^{-2}\,\boldsymbol{v}'_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_2),\\ &= \gamma'_1\,(1 - c^{-2}\,\boldsymbol{v}'_1\cdot\boldsymbol{v}'_2)\,\mathrm{d}t'.\end{aligned} \tag{6}$$

γ ضریب ِ لُرِنتس [2] است:

$$\gamma(\boldsymbol{v}) = (1 - c^{-2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})^{-1/2}. \tag{7}$$

بخشها ی ِ موازی و عمودی ی ِ بردارها نسبت به $\boldsymbol{v}'_1$ تعریف شده اند. این که در رابطه ی ِ آخر $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_2$ ظاهر شده به این خاطر است که $\mathrm{d}t$ اختلاف ِ زمان ِ دُ رویداد بر جهانخط ِ ذره ی ِ2 است. به این ترتیب،

$$\mathrm{d}S'_{\mathrm{I}} = -\frac{k}{|\gamma'_1\,(\boldsymbol{r}'_{2\,\parallel} - \boldsymbol{r}'_{1\,\parallel}) + \boldsymbol{r}'_{2\,\perp} - \boldsymbol{r}'_{1\,\perp}|}\,\gamma'_1\,(1 - c^{-2}\,\boldsymbol{v}'_1\cdot\boldsymbol{v}'_2)\,\mathrm{d}t' + o(c^{-2}), \tag{8}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S'_{\mathrm{I}} = &-\frac{k}{|\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1 + (1/2)\,c^{-2}\,[(\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1)\,\cdot\boldsymbol{v}'_1]\,\boldsymbol{v}'_1|}\,[1 + (1/2)\,c^{-2}\,\boldsymbol{v}'_1\cdot\boldsymbol{v}'_1]\\ &(1 - c^{-2}\,\boldsymbol{v}'_1\cdot\boldsymbol{v}'_2)\,\mathrm{d}t' + o(c^{-2}),\end{aligned} \tag{9}$$

یا

$$\mathrm{d}S'_{\mathrm{I}} = -\frac{k}{|\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1|}\left(1 + c^{-2}\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{[(\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1)\cdot\boldsymbol{v}'_1]^2}{|\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1|^2} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}'_1\cdot\boldsymbol{v}'_1 - \boldsymbol{v}'_1\cdot\boldsymbol{v}'_2\right\}\right)\mathrm{d}t' + o(c^{-2}). \tag{10}$$

1.3 ذره یِ اول شتاب دارد

S_{I} در این حالت را هم میشود با خیزاندن ِ مجموعه از حالت ی که ذره یِ اول ساکن است به دست آورد. به این ترتیب که S_{I} در این حالت را با وضعیت ی مقایسه میکنم که سرعت ِ ذره یِ اول ثابت است. اثر ی که ذره یِ دوم در زمان ِ t' از ذره یِ اول میگیرد، مربوط به وضعیت ِ ذره یِ اول در زمان ِ t'_{r} است، که

$$c\,(t' - t'_{\mathrm{r}}) = |\boldsymbol{r}'_2(t') - \boldsymbol{r}'_1(t'_{\mathrm{r}})|. \tag{11}$$

این که ذره یِ اول از t'_{r} تا t' شتاب داشته باشد یا نَ، بر ذره یِ دوم در t' اثر ی ندارد. پس $\mathrm{d}S'_{\mathrm{I}}$ هم ان عبارت ِ (8) یا (9) میشود، به شرط ِ این که به جا یِ $\boldsymbol{r}'_1$ مکان ی بیاید که ذره یِ اول در t' آنجا میبود، اگر بین ِ t'_{r} و t' شتاب نمیداشت. این مکان را با $\boldsymbol{r}''_1$ نشان میدهم، که

$$\boldsymbol{r}'_1 = \boldsymbol{r}''_1 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a}'_1\,(t' - t'_{\mathrm{r}})^2 + o[(t' - t'_{\mathrm{r}})^2]. \tag{12}$$

از (11) دیده میشود

$$t' - t'_{\mathrm{r}} = c^{-1}\,|\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1| + o(c^{-1}), \tag{13}$$

که $\boldsymbol{r}'_i$ جا یِ ذره یِ i در زمان ِ t' است. به این ترتیب (12) میشود

$$\boldsymbol{r}'_1 = \boldsymbol{r}''_1 + \frac{c^{-2}}{2}\,\boldsymbol{a}'_1\,|\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1|^2 + o(c^{-2}). \tag{14}$$

با گذاشتن ِ $\boldsymbol{r}''_1$ به جا یِ $\boldsymbol{r}'_1$ در (9) نتیجه میشود

$$\mathrm{d}S'_{\mathrm{I}} = -\frac{k}{|\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1 + (1/2)\,c^{-2}\,|\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1|^2\,\boldsymbol{a}'_1 + (1/2)\,c^{-2}\,[(\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1)\,\cdot\boldsymbol{v}'_1]\,\boldsymbol{v}'_1|}\,[1 + (1/2)\,c^{-2}\,\boldsymbol{v}'_1\cdot\boldsymbol{v}'_1]\,(1 - c^{-2}\,\boldsymbol{v}'_1\cdot\boldsymbol{v}'_2)\,\mathrm{d}t' + o(c^{-2}), \tag{15}$$

که به این ساده میشود

$$\mathrm{d}S'_{\mathrm{I}} = -\frac{k}{|\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1|}\left(1 + c^{-2}\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{[(\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1)\cdot\boldsymbol{v}'_1]^2}{|\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1|^2} - \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{r}'_2 - \boldsymbol{r}'_1)\cdot\boldsymbol{a}'_1 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}'_1\cdot\boldsymbol{v}'_1 - \boldsymbol{v}'_1\cdot\boldsymbol{v}'_2\right\}\right)\mathrm{d}t' + o(c^{-2}). \tag{16}$$

رُشن است که حالت ِ خاص ِ این رابطه (10) است.

2 کنش ِ دُ ذره یِ باردار در میدان ِ یکدیگر

کنش ِ رابطه یِ 111.16 برا یِ اثر ِ ذره یِ اول بر ذره یِ دوم را در نظر میگیرم. این کنش تقریبی ست (تا مرتبه یِ c^{-2} درست است) ولی قید ی بر سرعت یا شتاب ِ ذرها ندارد (جز این که این سرعتها و شتابها بزرگ نیستند). پس برا یِ ذرات ی با مشخصات ِ بدون- ِ-پریم هم

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{I}} = -\frac{k}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}\left(1 + c^{-2}\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{v}_1]^2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2} - \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2\right\}\right)\mathrm{d}t + o(c^{-2}). \tag{17}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\frac{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}\right] - \frac{(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}\\ &\quad + \frac{[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{v}_1]\,[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)]}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3},\\ &=: \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} - \frac{(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}\\ &\quad + \frac{[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{v}_1]\,[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)]}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3}\end{aligned} \tag{18}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{I}} = -\frac{k}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}\left(1 - \frac{c^{-2}}{2}\left\{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 + \frac{[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{v}_1]\,[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{v}_2]}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2}\right\}\right)\mathrm{d}t + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{k\,c^{-2}}{2}\,\Lambda\right)\right]\mathrm{d}t + o(c^{-2}). \tag{19}$$

میشود از لگرانژی یک مشتق ِ کامل نسبت به زمان را حذف کرد. پس کنش ِ برهمکنش را میشود $\tilde{S}_{\mathrm{I}}$ گرفت که

$$\mathrm{d}\tilde{S}_{\mathrm{I}} = -\frac{k}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}\left(1 - \frac{c^{-2}}{2}\left\{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \frac{[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot \boldsymbol{v}_1]\,[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot \boldsymbol{v}_2]}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2}\right\}\right)\mathrm{d}t + o(c^{-2}). \tag{20}$$

این کنش نسبت به ذرها یِ 1 و 2 هم متقارن است. پس برا یِ محاسبه یِ نَ تنها معادله یِ حرکت ِ ذره یِ 2، بل که معادله یِ حرکت ِ ذره یِ 1 هم میشود آن را به کار برد. این هم ان َست که در فصل ِ 12 از [1] به دست آمده.

3 پانوشتها

[1] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[2] Lorentz