X1-112 (2015/11/29)

مدارها یِ دُقطبی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

مدارها یی بررسی میشوند که سه سر دارند، یک سرِ مشترک (زمین)، و سرها یِ ورودی و خروجی.
چند قضیه در باره یِ این مدارها ثابت میشود، برا یِ وقت ی که عنصرها یِ سازنده یِ مدار خطی و
مستقل َند.

0 قراردادها، معادلاتِ کلی

قراردادها هم انها یَند که در [1] به کار رفته اند. هر مدار (ِ فشرده) با یک شبکه و عنصرها یی که در شاخِها یِ شبکه اند مشخص میشود. برا یِ هر شاخه یک جهتِ قراردادی میگیرم: یک سرِ شاخه را سرِ مثبت و سرِ دیگرِ شاخه را سرِ منفی میگیرم. سرِ مثبتِ شاخه یِ j را با $\partial_+ j$ و سرِ منفی یِ شاخه یِ j را با $\partial_- j$ نشان میدهم. مجموعه یِ همه یِ شاخِها یی که گره یِ a سرِ مثبتِ شان است را با $(\partial_+)^{-1}a$ مجموعه یِ همه یِ شاخِها یی که گره یِ a سرِ منفی یِشان است را با $(\partial_-)^{-1}a$ نشان میدهم. این شبکه یِ (یا گرافِ) جهتدار را با Γ (ماتریسِ شبکه) مشخص میکنم. شاخصِ اولِ این ماتریس شاخصِ گره، و شاخصِ دومِ این ماتریس شاخصِ شاخه است، چنان که

$$\Gamma^a{}_j := \begin{cases} 1, & a = \partial_+ j \\ -1, & a = \partial_- j \\ 0, & (a \neq \partial_+ j) \wedge (a \neq \partial_- j) \end{cases} . \tag{1}$$

هر ستون ِ این ماتریس یک $+1$ و یک -1 دارد، و بقیه یِ عنصرها یَش 0 اند. از جمله با تعریف ِ همبردار ِ S با

$$S_a = 1, \tag{2}$$

دیده میشود

$$S\,\Gamma = 0. \tag{3}$$

عنصرها یِ مدار رابطه یِ بین ِ ولتاژها و جریانها یِ شاخِها را تعیین میکنند. ولتاژها و جریانها را با علامت ِ قراردادی به کار میبرم: ولتاژ ِ هر شاخه ولتاژ ِ سر ِ مثبت ِ آن منها یِ ولتاژ ِ سر ِ منفی یِ آن است. جریان ِ هر شاخه هم جریان ی است که از سر ِ مثبت به سر ِ منفی میرود. ولتاژ و جریان ِ شاخه یِ j را با، به ترتیب، V_j و I^j نشان میدهم. وقت ی بین ِ ولتاژ و جریان ِ فقط یک شاخه یک رابطه هست، میگویم عنصر ِ آن شاخه مستقل است. میگویم عنصر ِ یک شاخه مستقل و خطی ست، وقت ی آن عنصر مستقل باشد و رابطه یِ بین ِ ولتاژ و جریان ِ شاخه خطی باشد. میگویم مدار مستقل-از-زمان است، اگر همه یِ رابطِها یِ بین ِ (ولتاژ و جریان ِ) عنصرها یَش (جز منبعها) مستقل-از-زمان باشد.

2 دسته از معادلات ِ مدار َند که به فقط شبکه بستِگی دارند، یعنی تابع ِ اجزا یِ مدار نیستند: این که جمع ِ جبری یِ همه یِ جریانها یی که از یک گره بیرون میروند صفر است، و این که جمع ِ جبری یِ ولتاژها یِ شاخِها یِ هر حلقه صفر است. اولی میشود

$$\Gamma^a{}_j\, I^j = 0. \tag{4}$$

دومی را میشود چنین نوشت که هر گره ولتاژ ِ معین دارد و ولتاژ ِ هر شاخه ولتاژ ِ سر ِ مثبت ِ آن شاخه منها یِ ولتاژ ِ سر ِ منفی یِ آن است. ولتاژ ِ گره یِ a را با E_a نشان میدهم:

$$V_j = E_a\, \Gamma^a{}_j. \tag{5}$$

شکل ِ بسته یِ (4) و (5) میشود

$$\Gamma\, I = 0, \tag{6}$$

$$V = E\,\Gamma. \tag{7}$$

یک پیامد ِ رابطِها یِ 6 و 7 این است که برا یِ دُ مدار (بی-پریم و پریم-دار) با شبکِها یِ یکسان (یعنی Γ' با Γ برابر است)، ولی نَ لزومَن عنصرها یِ یکسان،

$$V\, I' = 0, \tag{8}$$

یا مفصلتر،

$$V_j\, I'^j = 0. \tag{9}$$

و البته رُشن است که رابطه یِ مشابه ی هم برا یِ V' و I برقرار است. به این قضیه یِ دُجانبگی میگویند. در حالت ِ خاص ی که مدار ِ بی-پریم و مدار ِ پریم-دار یکسان باشند، این قضیه میگوید جمع ِ توانها یی که در شاخِها مصرف شده صفر است:

$$V_j\, I^j = 0. \tag{10}$$

این شکل ی از پایستِگی یِ انرژی ست.

اینها را میشود در مثلَن [2] یافت.

1 مدار ِ دُقطبی

مدار ِ دُقطبی به مدار ی میگویم که سه سر دارد: یک سر ِ مشترک (زمین یا 0) و دُ سر ِ 1 و 2. جریان ی که از سر ِ α وارد ِ مدار میشود را با I^α، و ولتاژ ِ سر ِ α نسبت به سر ِ 0 را با E_α نشان میدهم. α مقدارها یِ 1 یا 2 میگیرد. میشود یک شاخه بین ِ سر ِ 1 و 0 و یک شاخه بین ِ سر ِ 2 و 0 گذاشت (جز شاخِها یی که ممکن است از پیش بین ِ این سرها باشد). به این شاخِها (شاخِها یِ، به ترتیب، 1 و 2) شاخِها یِ بیرونی (و به بقیه یِ شاخِها شاخِها یِ درونی)، و به مدار ِ حاصل یک دُقطبی یِ ختم-شده

میگویم. رُشن است که برا یِ یک دُقطبی یِ ختم-شده، جریان ِ شاخه یِ بیرونی یِ α برابر با $(-I^\alpha)$ است.

وقت ی دُقطبی خطی ست، بین ِ جریانها و ولتاژها یِ شاخِها یِ بیرونی دُ رابطه یِ خطی هست، که میشود آنها را به شکل ِ ماتریسی نوشت:

$$Y = T\,X, \tag{11}$$

یا

$$S = H\,R, \tag{12}$$

که

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^1 & -I^2 \\ E_1 & E_2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^1 & I^2 \\ E_2 & E_1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

به T ماتریس ِ انتقال و به H ماتریس ِ مخلوط میگویند. رُشن است که T و H مستقل از هم نیستند. دیده میشود

$$\begin{pmatrix} {H^1}_1 & {H^1}_2 \\ {H^2}_1 & {H^2}_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{{T^2}_2} \begin{pmatrix} \det T & {T^1}_2 \\ {T^2}_1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} {T^1}_1 & {T^1}_2 \\ {T^2}_1 & {T^2}_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{{H^2}_2} \begin{pmatrix} \det H & {H^1}_2 \\ {H^2}_1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

از جمله،

$$\det H = -\frac{{T^1}_1}{{T^2}_2}. \tag{17}$$

$$\det T = -\frac{{H^1}_1}{{H^2}_2}. \tag{18}$$

برا یِ یک دُقطبی یِ ختم-شده، قضیه یِ دُجانبِگی به این شکل در میئاید.

$$E'_1\, I^1 + E'_2\, I^2 = V_j\, I'^j, \tag{19}$$

که جمعبندی رو یِ شاخِها یِ درونی ست: شاخصها یِ لاتین مقدارها یِ بزرگتر از 2 را میپذیرند. اگر همه یِ شاخِها یِ درونی مقاومت و خطی باشند:

$$V_j = R^j\, I^j, \tag{20}$$

از (19) نتیجه میشود

$$E'_1\, I^1 + E'_2\, I^2 = \sum_j R^j\, I^j\, I'^j. \tag{21}$$

اگر شاخِها یِ درونی یِ دُقطبی یِ ختم شده در حالت ِ بدون- ِ-پریم و پریمدار یکسان باشند:

$$R'^j = R^j, \tag{22}$$

آنگاه طرف ِ راست ِ (21) با تعویض ِ متغیرها یِ بدون- ِ-پریم و پریمدار با هم تغییر نمیکند. به این ترتیب،

$$E'_1\, I^1 + E'_2\, I^2 = E_1\, I'^1 + E_2\, I'^2. \tag{23}$$

در واقع این نتیجه برا یِ حالتها یِ کلیتر ی هم به دست میئاید: اگر

$$V_j = Z_{j\,k}\, I^k, \tag{24}$$

که Z متقارن است، باز هم (23) برقرار است. اگر به جا یِ ولتاژها و جریانها تبدیلها یی خطی از آنها به کار رود، چنان که رابطه یِ تبدیل-یافتِها با هم نقطِئی باشد (مثلَن فازُر ِ کمیت به جا یِ خُد ِ کمیت به کار رود) باز هم (23) (البته برا یِ تبدیل-یافتِها) برقرار است. پس وقت ی دُقطبی خطی ست و شامل ِ فقط مقاومت، خازن، و القاگر ِ مستقل-از-زمان است، و این عنصرعا مستقل َند، یا کلیتر رابطه یِ فازرها یِ جریانها و ولتاژها یِ شاخِها یِ درونی با هم با یک ماتریس ِ متقارن است، (23) برقرار است، البته برا یِ فازرها.

(23) را میشود چنین نوشت

$$E'_2\,(-I^2) - E_2\,(-I'^2) = E'_1\, I^1 - E_1\, I'^1, \tag{25}$$

یا بستِتر،

$$\varepsilon(Y, Y') = \varepsilon(X, X'), \tag{26}$$

که ε عنصر ِ مساحت است. از (11) دیده میشود

$$\varepsilon(Y, Y') = (\det T)\, \varepsilon(X, X'). \tag{27}$$

از این و (26) نتیجه میشود

$$\det T = 1 \tag{28}$$

که با توجه به (15) همئرز است با

$$H^2{}_2 = -H^1{}_1. \tag{29}$$

وقت ی (28) یا همئرز با آن (29) برقرار است، میگویم دُقطبی دُجانبه است.

اگر در یک دُقطبی یِ خطی اسم ِ گرِها یِ 1 و 2 با هم عوض شود، یک دُقطبی یِ خطی یِ دیگر نتیجه میشود. ماتریسها یِ انتقال و مخلوط ِ متناظر با این دُقطبی یِ جدید را با، به ترتیب، $\tilde{T}$ و $\tilde{H}$ نشان میدهم. به سادِگی دیده میشود

$$\tilde{T} = \sigma\, T^{-1}\, \sigma, \tag{30}$$

$$\tilde{H} = H^{-1}, \tag{31}$$

که

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

از جمله اگر دُقطبی دُجانبه باشد،

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}^1{}_1 & \tilde{T}^1{}_2 \\ \tilde{T}^2{}_1 & \tilde{T}^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^2{}_2 & T^1{}_2 \\ T^2{}_1 & T^1{}_1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

2 دُقطبیها یِ خطی یِ مقاومتی

وقت ی همه یِ شاخِها یِ دُقطبی مقاومت ِ مستقل ِ خطی (یِ مثبت) باشند، قیدها یی به شکل ِ نابرابری بر عنصرها یِ ماتریس ِ انتقال (یا همئرز با آن ماتریس ِ مخلوط) هست.

یک دُقطبی میگیرم که همه یِ شاخِها یَش مقاومتها یِ خطی یِ مستقل ِ مثبت َند. شاخه یِ بیرونی یِ بین ِ 1 و 0 را مدار-باز میگیرم. شاخه یِ بیرونی یِ بین ِ 2 و 0 را هم یک منبع ِ ولتاژ میگیرم. به این ترتیب I_1 صفر است. مدار ی که به این ترتیب به دست میئاید شامل ِ فقط مقاومتها یِ خطی یِ مستقل ِ مثبت و فقط یک منبع است: برا یِ هر گره ای جز گره یِ 0 یا 2، همه یِ شاخِها یی که آن گره یک سر ِشان است مقاومتی یَند. پس، از رابطه یِ (4) (این که جمع ِ جبری یِ جریانها یی که از یک گره بیرون میروند صفر است) نتیجه میشود

$$\sum_{j\in[(\partial_+)^{-1}a]}\frac{E_a-E_{\partial_-j}}{R_j}+\sum_{j\in[(\partial_-)^{-1}a]}\frac{E_a-E_{\partial_+j}}{R_j}=0,\quad (a\neq 0)\wedge(a\neq 2). \quad (34)$$

از این رابطه همراه با این که R_j ها مثبت َند نتیجه میشود بیشینه یا کمینه یِ ولتاژها یِ گره به ازا یِ a برابر با 0 یا 2 رخ میدهد: اگر بیشینه (کمینه) به ازا یِ a رخ دهد که 0 یا 2 نیست، همه یِ جملِها یِ طرف ِ چپ ِ (34) مثبت (منفی) میشوند و برابری یِ (34) برقرار نمیشود. نتیجه این که

$$0<E_a<E_2,\quad (E_2>0)\wedge(a\neq 0)\wedge(a\neq 2). \quad (35)$$

از جمله دیده میشود

$$\frac{E_2}{E_1}>1. \quad (36)$$

چون I_1 صفر است، (E_2/E_1) هم ان ${T^2}_2$ است. پس

$${T^2}_2>1. \quad (37)$$

با تعویض ِ اسم ِ گرِها یِ 1 و 2 با هم، و با استفاده از (33) نتیجه میشود

$${T^1}_1>1. \quad (38)$$

یک حالت ِ خاص ِ رابطه یِ (21) این است.

$$E_1\,I^1+E_2\,I^2=\sum_j R^j\,(I^j)^2. \quad (39)$$

از این نتیجه میشود اگر E_1 یا I^1 صفر باشد، $(E_2\, I^2)$ مثبت است. به این ترتیب،

$$(T^1{}_1\, I^1 + T^1{}_2\, E_1)\,(T^2{}_1\, I^1 + T^2{}_2\, E_1) < 0, \quad (E_1\, I^1 = 0) \tag{40}$$

یا

$$(T^1{}_1\, T^2{}_1)\,(I^1)^2 + (T^1{}_2\, T^2{}_2)\,(E_1)^2 < 0, \quad (E_1\, I^1 = 0) \tag{41}$$

که یعنی

$$T^1{}_1\, T^2{}_1 < 0. \tag{42}$$

$$T^1{}_2\, T^2{}_2 < 0. \tag{43}$$

از اینها، همراه با (37) و (38) نتیجه میشود

$$T^2{}_1 < 0. \tag{44}$$

$$T^1{}_2 < 0. \tag{45}$$

روابطِ (37) و (38) و (44) و (45) قیدها یی افزون بر (28) اند، که برا یِ دُقطبیها یِ خطی یِ مقاومتی برقرار َند: برا یِ چنین دُقطبیها یی عنصرها یِ قطری یِ ماتریسِ انتقال بزرگتر از یک َند، عنصرها یِ ناقطری یِ ماتریسِ انتقال منفی یَند، و دترمینانِ ماتریسِ انتقال یک است.

3 تحققِ مدار

مدارها یِ دُقطبی یِ خطی یِ مقاومتی روابطِ (37) و (38) و (44) و (45) و (28) بر میئاورند. نشان میدهم عکسِ این گزاره هم درست است. یعنی متناظر با هر ماتریسِ T که این روابط را براورد یک دُقطبی هست که T ماتریسِ انتقالِ آن است. این دُقطبی را با 3 مقاومت میسازم: مقاومتِ R بینِ 1 و 2، مقاومتِ R_1 بینِ 1 و 0، و مقاومتِ R_2 بینِ 2 و 0. دیده میشود

$$\frac{E_1 - E_2}{R} + \frac{E_1}{R_1} = I^1. \tag{46}$$

$$\frac{E_2 - E_1}{R} + \frac{E_2}{R_2} = I^2. \tag{47}$$

از اینجا،

$$T^1{}_1 = \frac{R + R_2}{R_2}. \tag{48}$$

$$T^1{}_2 = -\frac{R + R_1 + R_2}{R_1\, R_2}. \tag{49}$$

$$T^2{}_1 = -R. \tag{50}$$

$$T^2{}_2 = \frac{R + R_1}{R_1}. \tag{51}$$

این معادلات را میشود وارون کرد و مقاومتها را بر حسبِ عنصرها یِ T حساب کرد. از (48) و (50) و (51) نتیجه میشود

$$R = -T^2{}_1. \tag{52}$$

$$R_1 = -\frac{T^2{}_1}{T^2{}_2 - 1}. \tag{53}$$

$$R_2 = -\frac{T^2{}_1}{T^1{}_1 - 1}. \tag{54}$$

شرطها یِ (37) و (38) و (44) تضمین میکنند این مقاومتها مثبت َند. شرطِ (28) هم نشان میدهد $T^1{}_2$ از بقیه یِ عنصرها یِ T مستقل نیست: اگر بقیه یِ عنصرها یِ T محقق شده باشند و $\det T$ هم محقق شده باشد، $T^1{}_2$ هم محقق شده است. دترمینانِ ماتریس- ِانتقالِ دُقطبی یی که با این مقاومتها ساخته شده یک است. پس دترمینانِ T محقق شده است، و از اینجا نتیجه میشود $T^1{}_2$ هم محقق شده.

4 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «ویژِنماها یِ مدارها یِ غیر- ِفعال»؛ X1-072 (2010/11/26)

[2] Charles A. Desoer & Ernest S. Kuh; “basic circuit theory” (Mc-Graw Hill, 1969) chapter 10