X1-114 (2016/02/25)

کُنج ِ فْرُنه

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

کُنج ِ فْرُنه [1] (چارچوب ِ همراه ِ یک خم) و حرکت ِ آن بر خم بررسی میشود.

1 چارچوب ِ همراه ِ خم

خم ِ γ در یک فضا یِ اقلیدسی را در نظر میگیرم. مشتق ِ j ُم ِ این خم در هر نقطه یک بردار است:

$$u_j(t) = (\mathsf{D}^j\,\gamma)(t), \tag{1}$$

که D مشتقگیری ست. فرض میکنم $u_{(m)} = \{(j, u_j) \mid 1 \le j \le m\}$ خطی-مستقل است، اما $u_{(m+1)}$ خطی-وابسته است، که یعنی u_{m+1} در پهنه یِ $u_{(m)}$ است. در این صورت از $u_{(m)}$ میشود یک مجموعه یِ متعامد ِ $v_{(m)}$ ساخت:

$$v_j = u_j - \sum_{k=1}^{j-1} v_k\,\frac{v_k \cdot u_j}{v_k \cdot v_k}, \tag{2}$$

که $(\Xi \cdot \Upsilon)$ شبه- ِضرب ِ درونی یِ Ξ در Υ است. فرض نشده این شبه- ِضرب معین-مثبت است، اما فرض شده $(v_k \cdot v_k)$ ها صفر نیستند. با یک استقرا دیده میشود $v_{(m)}$ خطی-مستقل و متعامد است (و v_{m+1} صفر است). این هم ان روش ِ گرام-شْمیت [2] برا یِ ساختن ِ یک مجموعه یِ متعامد از

یک مجموعه یِ خطی-مستقل است. از (1) و (2) دیده میشود

$$\mathsf{D}\, v_j = v_{j+1} + \sum_{k=1}^{j} a_{k\,j}\, v_k. \tag{3}$$

از تعامد ِ $v_{(m)}$ دیده میشود

$$(\mathsf{D}\, v_j) \cdot v_l = -v_j \cdot (\mathsf{D}\, v_l). \tag{4}$$

از این و (3) و تعامد ِ $v_{(m)}$ هم نتیجه میشود

$$(\mathsf{D}\, v_j) \cdot v_l = \begin{cases} -v_j \cdot v_j, & l = j-1 \\ 0, & l < j-1 \end{cases}. \tag{5}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{D}\, v_j = v_{j+1} + \frac{\mathsf{D}\, \|v_j\|}{\|v_j\|}\, v_j - \frac{v_j \cdot v_j}{v_{j-1} \cdot v_{j-1}}\, v_{j-1}, \tag{6}$$

که $\|\Xi\|$ طول ِ بردار ِ Ξ است:

$$\|\Xi\| = \sqrt{|\Xi \cdot \Xi|}. \tag{7}$$

$u_{(m)}$ و $v_{(m)}$ به پارامتری-کردن ِ خم بستِگی دارند. تغییر ِ پارامتر متناظر است با تبدیل ِ D به $(f\,\mathsf{D})$، که f تابع ی از پارامتر ِ خم است. $u'_{(m)}$ را متناظر با پارامتر ِ جدید تعریف میکنم:

$$\begin{aligned} u'_j &= (f\,\mathsf{D})^j\, \gamma, \\ &= f^j\, \mathsf{D}^j\, \gamma + \sum_{k=1}^{j-1} f_k\, \mathsf{D}^k\, \gamma, \end{aligned} \tag{8}$$

که f_k ها ترکیبها یی از توانها یِ f و مشتقات ِ f اند. به این ترتیب،

$$u'_j = f^j\, u_j + \sum_{k=1}^{j-1} f_k\, u_k. \tag{9}$$

$v'_{(m)}$ را با روش ِ گرام-شْمیت [2] از $u'_{(m)}$ میسازم. رابطه یِ $v'_{(m)}$ با $v_{(m)}$ سادِتر از رابطه یِ $u'_{(m)}$ با $u_{(m)}$ است. با یک استقرا معلوم میشود

$$v'_j = f^j\, v_j. \tag{10}$$

از جمله دیده میشود σ_j با

$$\sigma_j = \frac{v_{j+1}\cdot v_{j+1}}{\|v_1\|^2\,(v_j\cdot v_j)} \tag{11}$$

به پارامتری-کردن ِ خم بستِگی ندارد. (6) میشود

$$\mathsf{D}\, v_j = v_{j+1} + \frac{\mathsf{D}\,\|v_j\|}{\|v_j\|}\, v_j - \sigma_{j-1}\,\|v_1\|^2\, v_{j-1}. \tag{12}$$

یک انتخاب برا یِ پارامتر طول- ِ-خم است. این متناظر است با

$$f = \frac{1}{\|v_1\|}. \tag{13}$$

v و D یِ متناظر با این انتخاب را با، به ترتیب، $\mathfrak{v}$ و $\mathfrak{D}$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\|\mathfrak{v}_1\| = 1. \tag{14}$$

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{v}_j = \mathfrak{v}_{j+1} + \frac{\mathsf{D}\,\|\mathfrak{v}_j\|}{\|\mathfrak{v}_j\|}\,\mathfrak{v}_j - \sigma_{j-1}\,\mathfrak{v}_{j-1}. \tag{15}$$

$$\mathfrak{v}_{m+1} = 0. \tag{16}$$

سرانجام، تعریف میکنم

$$\tau_j = \frac{v_j}{\|v_j\|}. \tag{17}$$

$$\kappa_j = [\mathrm{sgn}(\sigma_j)]\,\sqrt{|\sigma_j|}. \tag{18}$$

τ_j ها هم به پارامتری-کردن ِ خم بستِگی ندارند، و رُشن است که $\tau_{(m)}$ یکه-متعامد است، و

$$\mathfrak{D}\,\tau_j = |\kappa_j|\,\tau_{j+1} - \kappa_{j-1}\,\tau_{j-1}. \tag{19}$$

$$\kappa_m = 0. \tag{20}$$

اینها را میشود چنین نوشت.

$$\mathfrak{D}\, T = T\, K, \tag{21}$$

که T ماتریس ی $m\times m$ است که ستون ِ j َش برابر با τ_j است، و ماتریس ِ K هم چنین است.

$$K^k{}_j = |\kappa_j|\, \delta^k_{j+1} - \kappa_{j-1}\, \delta^k_{j-1}. \tag{22}$$

به کُنج ی که با τ_j ها ساخته میشود کُنج ِ فْرُنه [1] میگویند، به ویژه وقت ی m بُعد ِ فضا ست. به K هم ماتریس ِ خمش میگویم.

2 ماتریس ِ خمش

w را در هسته ی ِ K میگیرم:

$$K\, w = 0. \tag{23}$$

دیده میشود

$$-\kappa_1\, w^2 = 0. \tag{24}$$

$$|\kappa_j|\, w^j - \kappa_{j+1}\, w^{j+2} = 0, \qquad 1 \le j \le m-2. \tag{25}$$

$$|\kappa_{m-1}|\, w^{m-1} = 0. \tag{26}$$

از (24) و (25) دیده میشود w^j برا ی ِ j ها ی ِ زُج صفر است. اگر m زُج باشد، از (26) و (25) دیده میشود w^j برا ی ِ j ها ی ِ فرد هم صفر است. پس اگر m زُج باشد w صفر است. یعنی برا ی ِ m ها ی ِ زُج، هسته ی ِ K بدیهی ست. برا ی ِ m ها ی ِ فرد، (26) مستقل از روابط ِ (24) و (25) نیست. دیده میشود اگر m فرد باشد (23) برا ی ِ w جواب ِ ناصفر هم دارد، و این جواب تنها یک پارامتر ِ آزاد

دارد:

$$w = 0, \qquad m = 2\,l. \tag{27}$$

$$w^{2\,r} = 0 \qquad m = 2\,l + 1. \tag{28}$$

$$w^{2\,r+1} = \frac{|\kappa_1|\,|\kappa_3|\cdots|\kappa_{2\,r-1}|}{\kappa_2\,\kappa_4\cdots\kappa_{2\,r}}\,w^1, \qquad m = 2\,l + 1. \tag{29}$$

حالا گیرم m فرد است. اگر بُعد ِ هسته ی ِ K^2 بیش از یک باشد، یک z در هسته ی ِ K^2 هست که ناصفر است و z^m صفر است. z' را هم ان z میگیرم که سطر ِ m َش حذف شده. K' را هم هم ان K میگیرم که سطر و ستون ِ m َش حذف شده. دیده میشود

$$K'^2\,z' = 0. \tag{30}$$

K' یک ماتریس ِ خمش است که بُعد َش زُج است. پس هسته اَش بدیهی ست. نتیجه میشود هسته ی ِ K'^2 هم بدیهی ست. پس z' صفر است، و در نتیجه z هم صفر است. بنابراین، این فرض که بُعد ِ هسته ی ِ K^2 بیش از یک است نادرست است. در نتیجه هسته ی ِ K^2 هم ان هسته ی ِ K است. خلاصه این که اگر m زُج باشد K ناتکین است، و اگر m فرد باشد ویژه-فضا ی ِ تعمیم-یافته ی ِ K متناظر با ویژه-مقدار ِ صفر یک-بُعدی و هم ان ویژه-فضا ی ِ K متناظر با ویژه-مقدار ِ صفر است.

3 مسیر

جواب ِ (21) میشود

$$T(s) = [T(0)]\,\left[\mathrm{Pexp}\int_0^s \mathrm{d}s'\,K(s')\right], \tag{31}$$

که Pexp نمایی ی ِ مسیر-مرتب است. از جمله در حالت ِ خاص ی که K ثابت باشد،

$$T(s) = [T(0)]\,[\exp(s\,K)]. \tag{32}$$

اگر شبه- ِ-ضرب ِ درونی معین-مثبت باشد (ضرب ِ درونی باشد)، κ_j ها مثبت َند. در این صورت K پادمتقارن میشود و $T(s)$ دَوران-یافته ی ِ $T(0)$ است.

مسیر با انتگرالگیری از τ_1 به دست میائید:

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= \gamma(0) + \int_0^s \mathrm{d}s'\, \tau_1(s'),\\ &= \gamma(0) + \int_0^s \mathrm{d}s'\, T(s')\, e_1,\end{aligned} \tag{33}$$

که e_1 بردار ی ست که مئلفه یِ اول َش یک است و بقیه یِ مئلفِها یَش صفر َند. به این ترتیب،

$$\gamma(s) = \gamma(0) + [T(0)]\left\{\int_0^s \mathrm{d}s' \left[\mathrm{Pexp}\int_0^{s'} \mathrm{d}s'\, K(s'')\right]\right\} e_1, \tag{34}$$

از این پس فرض میکنم K ثابت است. به این ترتیب،

$$\gamma(s) = \gamma(0) + [T(0)]\left\{\int_0^s \mathrm{d}s' \, [\exp(s'\,K)]\right\} e_1. \tag{35}$$

فضا را به دُ بخش تجزیه میکنم: $\mathbb{V}_0$ که ویژه-فضا یِ K متناظر با ویژه-مقدار ِ صفر است، و $\mathbb{V}_1$ که حاصل- ِ-جمع ِ مستقیم ِ بقیه یِ ویژه-فضاها یِ تعمیم-یافته یِ K است. افکنش ی که تصویر َش $\mathbb{V}_0$ و هسته اشَ $\mathbb{V}_1$ است را با Π نشان میدهم. Π صفر است اگر m زُج باشد، و تصویر َش یک-بُعدی ست اگر m فرد باشد. دیده میشود

$$K = K\,(1-\Pi). \tag{36}$$

$$[K,\Pi] = 0. \tag{37}$$

$$(1-\Pi)^2 = 1-\Pi. \tag{38}$$

رابطه یِ اخیر یعنی $(1-\Pi)$ هم افکنش است. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\exp(s\,K) &= \exp[s\,K\,(1-\Pi)],\\ &= [\exp(s\,K)]\,(1-\Pi) + \Pi,\end{aligned} \tag{39}$$

که نتیجه میدهد

$$\int_0^s \mathrm{d}s' \, [\exp(s'\,K)] = [\exp(s\,K) - 1]\,L + s\,\Pi, \tag{40}$$

که L وارون ِ $K\,(1-\Pi)$ بر $\mathbb{V}_1$ است:

$$\begin{aligned}1-\Pi &= L\,K,\\ &= K\,L, \qquad (41)\\ 0 &= \Pi\,L,\\ &= L\,\Pi. \qquad (42)\end{aligned}$$

به این ترتیب،

$$\gamma(s) = a + [T(0)]\,[\exp(s\,K)]\,b + c\,s, \qquad (43)$$

که a و b و c بردارها یی ثابت َند:

$$a = \gamma(0) - [T(0)]\,L\,e_1. \qquad (44)$$

$$b = L\,e_1. \qquad (45)$$

$$c = [T(0)]\,\Pi\,e_1. \qquad (46)$$

a ممکن است هر بردار ی باشد. البته با انتخاب ِ مبدئ میشود آن را صفر کرد. b در $\mathbb{V}_1$ است و c در $[T(0)]\,(\mathbb{V}_0)$ است. $T(0)$ وارون-پذیر است. با تعریف ِ

$$\tilde{K} = [T(0)]\,K\,[T(0)]^{-1}, \qquad (47)$$

$$\tilde{b} = [T(0)]\,L\,e_1 \qquad (48)$$

نتیجه میشود

$$\gamma(s) = a + [\exp(s\,\tilde{K})]\,\tilde{b} + c\,s. \qquad (49)$$

وقت ی ضرب ِ درونی معین-مثبت است، K پادمتقارن است و $[T(0)]$ متعامد است. در نتیجه $\tilde{K}$ هم پادمتقارن است. در این حالت $[\exp(s\,K)]$ دَوَران است، و (49) مسیر ی را تُصیف میکند که تصویر َش بر صفحات ی عمود بر هم دایره است، و در یک راستا یِ عمود بر این صفحات خط ِ راست

است (به شرط ی که m فرد باشد، که چنین راستا یی وجود داشته باشد). از جمله، برا یِ $m = 2$، مسیر دایره است. برا یِ $m = 3$، مسیر یک مارپیچ ِ منظم است.

4 پانوشتها

[1] Frenet

[2] Gram-Schmidt