X1-115 (2016/04/29)

فضاها یِ بیشین- متقارن

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

متریک ِ فضاها یِ بیشین-متقارن به دست میئاید.

1 تقارنها یِ فضاها یِ بیشین- متقارن

خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ $\mathbb{M}$ با هموستار ِ لِوی- چیویتا [1] را در نظر میگیرم. میگویند میدان ِ برداری یِ ξ مولد ِ یک تقارن ِ متریک است (یک میدان ِ کیلینگ [2] است)، اگر متریک (g) تحت ِ شارش ِ این میدان تغییر نکند:

$$\{\partial_\alpha[\mathsf{fl}(t\,\xi)]^\mu\}\,\{\partial_\beta[\mathsf{fl}(t\,\xi)]^\nu\}\,\{g_{\mu\,\nu}\circ[\mathsf{fl}(t\,\xi)]\} = g_{\alpha\,\beta}. \tag{1}$$

$\mathsf{fl}(t\,\xi)$ شارش ِ میدان ِ برداری یِ ξ به اندازه یِ t است، تابع ی از خمینه به خمینه با این ویژگیها

$$\mathsf{D}\{[\mathsf{fl}(\centerdot\,\xi)](x)\} = \{\xi\circ[\mathsf{fl}(\centerdot\,\xi)]\}(x). \tag{2}$$

$$[\mathsf{fl}(0\,\xi)](x) = x. \tag{3}$$

D مشتقگیری ست. شرط ِ برقراری یِ (1) میشود

$$\xi^\mu\,\partial_\mu g_{\alpha\,\beta}+g_{\mu\,\beta}\,\partial_\alpha\xi^\mu+g_{\alpha\,\mu}\,\partial_\beta\xi^\mu=0, \tag{4}$$

یا

$$\partial_\alpha\xi_\beta+\partial_\beta\xi_\alpha-2\,\Gamma^\mu{}_{\alpha\,\beta}\,\xi_\mu=0, \tag{5}$$

که بسته اَش میشود

$$(\nabla\xi)_{\alpha\,\beta}+(\nabla\xi)_{\beta\,\alpha}=0. \tag{6}$$

∇ مشتق ِ هموردا ست و Γ هموستار ِ لِوی-چیویتا [1] است، که از این طریق به متریک وابسته است.

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\,\beta}=\frac{1}{2}\,g^{\nu\,\mu}\,(\partial_\alpha g_{\nu\,\beta}+\partial_\beta g_{\nu\,\alpha}-\partial_\nu g_{\alpha\,\beta}). \tag{7}$$

شاخصها با متریک پایین-ُ-بالا میروند، و محاسبات در یک پایه یِ مختصاتی انجام شده.

به تقارن ِ متریک ایزُمتری یا تقارن ِ فضا هم میگویند. یک تقارن ِ متریک، از جمله هر ژِئُدزیک را به یک ژِئُدزیک تبدیل میکند.

از (6) مشتق میگیرم و شاخصها را دُری جابِجا میکنم:

$$(\nabla\nabla\xi)_{\gamma\,\alpha\,\beta}+(\nabla\nabla\xi)_{\gamma\,\beta\,\alpha}=0. \tag{8}$$

$$(\nabla\nabla\xi)_{\alpha\,\beta\,\gamma}+(\nabla\nabla\xi)_{\alpha\,\gamma\,\beta}=0. \tag{9}$$

$$(\nabla\nabla\xi)_{\beta\,\gamma\,\alpha}+(\nabla\nabla\xi)_{\beta\,\alpha\,\gamma}=0. \tag{10}$$

برابری یِ اول را از مجموع ِ برابریها یِ دوم و سوم کم میکنم:

$$\begin{aligned}2\,(\nabla\nabla\xi)_{\alpha\,\beta\,\gamma}=&[(\nabla\nabla\xi)_{\gamma\,\alpha\,\beta}-(\nabla\nabla\xi)_{\alpha\,\gamma\,\beta}]+[(\nabla\nabla\xi)_{\gamma\,\beta\,\alpha}-(\nabla\nabla\xi)_{\beta\,\gamma\,\alpha}]\\&+[(\nabla\nabla\xi)_{\alpha\,\beta\,\gamma}-(\nabla\nabla\xi)_{\beta\,\alpha\,\gamma}].\end{aligned} \tag{11}$$

یک راه ِ ساده یِ محاسبه یِ هر یک از کروشِها یِ طرف ِ راست، استفاده از مختصات ی ست که در

یک نقطه مئلفِها یِ هموستار ِ لِوی-چیویتا [1] را صفر میکنند. با این مختصات و در آن نقطه،

$$[(\nabla\nabla\xi)_{\alpha\,\beta\,\gamma}-(\nabla\nabla\xi)_{\beta\,\alpha\,\gamma}]=\partial_\alpha\partial_\beta\xi_\gamma-(\partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\beta\,\gamma})\,\xi_\mu-\partial_\beta\partial_\alpha\xi_\gamma+(\partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\alpha\,\gamma})\,\xi_\mu,$$
$$=(\partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\alpha\,\gamma}-\partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\beta\,\gamma})\,\xi_\mu. \tag{12}$$

با این مختصات و در آن نقطه، ضمنَن

$$\partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\alpha\,\gamma}-\partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\beta\,\gamma}=R^\mu{}_{\gamma\,\beta\,\alpha}, \tag{13}$$

که R تانسُر ِ ریمان [3] است. به این ترتیب، با این مختصات و در آن نقطه،

$$[(\nabla\nabla\xi)_{\alpha\,\beta\,\gamma}-(\nabla\nabla\xi)_{\beta\,\alpha\,\gamma}]=R^\mu{}_{\gamma\,\beta\,\alpha}\,\xi_\mu. \tag{14}$$

دُ-طرف ِ این برابری بر حسب ِ مئلفِها یِ تانسُرها یی مستقل از پایه نوشته شده اند. پس این برابری، هر چند با مختصات ی خاص به دست آمد مستقل از مختصات (پایه) درست است. با استفاده از این و (11) نتیجه میشود

$$2\,(\nabla\nabla\xi)_{\alpha\,\beta\,\gamma}=(R^\mu{}_{\beta\,\alpha\,\gamma}+R^\mu{}_{\alpha\,\beta\,\gamma}+R^\mu{}_{\gamma\,\beta\,\alpha})\,\xi_\mu, \tag{15}$$

که با اتحاد ِ اول ِ بیانکی [4]

$$R^\mu{}_{\beta\,\alpha\,\gamma}+R^\mu{}_{\gamma\,\beta\,\alpha}=R^\mu{}_{\alpha\,\beta\,\gamma}, \tag{16}$$

نتیجه میدهد

$$(\nabla\nabla\xi)_{\alpha\,\beta\,\gamma}=R^\mu{}_{\alpha\,\beta\,\gamma}\,\xi_\mu. \tag{17}$$

این یک دستگاه ِ معادلات ِ دیفرانسیل ِ مرتبه یِ دُ برا یِ ξ است. با معلوم-بودن ِ ξ و مشتق ِ اول ِ آن در یک نقطه (مانسته یِ شرط ِ اولیه)، همه یِ مشتقها یِ بعدی یِ ξ در آن نقطه مشخص میشوند و به این ترتیب، علی‌الاصول ξ مشخص میشود. البته چنین نیست که این دستگاه برا یِ هر شرط- ِ-اولیه ای جواب داشته باشد. از جمله شرط- ِ-اولیه باید (6) را براورَد. پس، از مشتق ِ اول در شرط- ِ-اولیه، فقط

بخش ِ پادمتقارن است که باید مشخص شود. البته این که شرط ِ اولیه (6) را براورَد هم تضمین نمیکند دستگاه ِ (17) جواب داشته باشد. تعداد ِ پارامترها یِ مستقل ِ جوابها یِ (17) به اندازه یِ تعداد ِ پارامترها یِ مستقل ِ شرط-ِ-اولیها یی ست که به ازا یِشان (17) جواب دارد. این تعداد دست-ِ-بالا به اندازه یِ تعداد ِ مئلفِها یِ ξ به اضافه یِ تعداد ِ مئلفِها یِ مستقل ِ بخش ِ پادمتقارن ِ مشتق ِ ξ است. اولی برابر با D و دومی برابر با $D\,(D-1)/2$ است، که D بُعد ِ فضا ست. پس تعداد ِ پارامترها یِ مستقل ِ جوابها یِ (17) دست-ِ-بالا $D\,(D+1)/2$ است. دستگاه ِ (17) ضمنَن خطی ست. تعداد ِ پارامترها یِ مستقل ِ جوابها هم ان بُعد ِ فضا یِ جوابها، یا بُعد ِ فضا یِ شرط-ِ-اولیها ست. بُعد ِ فضا یِ جوابها یِ (17) بُعد ِ گروه ِ تقارنها یِ فضا ست. به این ترتیب بُعد ِ گروه ِ تقارنها یِ فضا دست-ِ-بالا $D\,(D+1)/2$ است. میگویند فضا بیشین-متقارن است، اگر بُعد ِ گروه ِ تقارنها یِ فضا برابر با $D\,(D+1)/2$ باشد.

اینها را میشود در مثلَن فصلها یِ 3 و 6 و 13 از [5] یافت.

2 مختصات ِ همطول

هم ان تعریف ِ مختصات ِ همطول در [6] را تکرار میکنم، با اندک ی تغییر از جمله در این که خمینه شبه-ِ-ریمانی ست، لازم نیست ریمانی باشد، یعنی لازم نیست متریک معین-مثبت باشد.

خمینه یِ شبه-ِ-ریمانی یِ $\mathbb{M}$ با هموستار ِ لِوی-چیویتا [1] را در نظر میگیرم. ژئُدزیکهایی که از نقطه یِ O در این خمینه میگذرند با بردار ِ مماس بر ژئُدزیک (مشتق ِ ژئُدزیک نسبت به پارامتر ِ َش) در O مشخص میشوند. ژئُدزیک ِ γ_y با پارامتر ِ آفین را چنین تعریف میکنم.

$$\gamma_y(0)=O. \tag{18}$$

$$(\mathsf{D}\gamma_y)(0)=y. \tag{19}$$

مختصات ِ ϕ را چنین تعریف میکنم.

$$\phi[\gamma_y(1)]=y. \tag{20}$$

سادتر، ϕ را با خُد ِ y نشان میدهم:

$$y[\gamma_y(1)] = y. \tag{21}$$

با پارامتر ِ آفین، مجذور ِ مشتق ِ ژئُدزیک ثابت میمانَد. پس

$$[(\mathsf{D}\gamma_y)(\lambda)] \cdot [(\mathsf{D}\gamma_y)(\lambda)] = y \cdot y. \tag{22}$$

البته بد نیست توجه شود که حاصل‌ـ ِضرب ِ درونی، در طرف ِ چپ برا یِ بردارها یی در $\gamma_y(\lambda)$ است، و با متریک در این نقطه تعریف میشود؛ در حال ی که در طرف ِ راست برا یِ بردارها یی در $\gamma_y(0)$ یعنی در O است، و با متریک در O تعریف میشود. متریک در O را با η نشان میدهم. مفصلتر ِ (22) میشود

$$\{g_{\alpha\,\beta}[\gamma_y(\lambda)]\}\,[(\mathsf{D}\gamma_y)^\alpha(\lambda)]\,[(\mathsf{D}\gamma_y)^\beta(\lambda)] = \eta_{\alpha\,\beta}\,y^\alpha\,y^\beta. \tag{23}$$

از تعریف ِ γ_y دیده میشود

$$\gamma_y(\lambda) = \gamma_{\lambda\,y}(1). \tag{24}$$

به این ترتیب،

$$(\mathsf{D}\gamma_y)^\alpha(\lambda) = y^\alpha. \tag{25}$$

به این ترتیب (23) میشود

$$\{g_{\alpha\,\beta}[\gamma_{\lambda\,y}(1)]\}\,y^\alpha\,y^\beta = \eta_{\alpha\,\beta}\,y^\alpha\,y^\beta, \tag{26}$$

یا،

$$\{g_{\alpha\,\beta}[\phi^{-1}(y)]\}\,y^\alpha\,y^\beta = \eta_{\alpha\,\beta}\,y^\alpha\,y^\beta. \tag{27}$$

رابطه یِ اخیر چنین به دست میئاید که در (26) به جا یِ λ یک گذاشته شود.

3 میدانها یِ کیلینگ در فضاها یِ بیشین- متقارن

یک دسته از میدانها یِ کیلینگ [2] هستند که در O صفر میشوند. اینها را با Ξ_ω نشان میدهم، که

$$\omega_{\alpha\,\beta} = [\partial_\beta(\Xi_\omega)_\alpha](O), \tag{28}$$

و البته از

$$\Xi_\omega(O) = 0, \tag{29}$$

و (5) نتیجه میشود

$$\omega_{\alpha\,\beta} = \frac{1}{2}\,[\partial_\beta(\Xi_\omega)_\alpha - \partial_\alpha(\Xi_\omega)_\beta](O). \tag{30}$$

رابطه یِ (28) را میشود چنین نوشت

$$(\Xi_\omega)^\alpha[\phi^{-1}(y)] = \omega^\alpha{}_\beta\, y^\beta + o(y), \tag{31}$$

که ω (با هر-دُ-شاخص بالا یا هر-دُ-شاخص پایین) پادمتقارن است. و شاخصها یِ y و ω با η پایین-ُ-بالا میروند:

$$y_\alpha = \eta_{\alpha\,\mu}\, y^\mu. \tag{32}$$

$$\omega_{\alpha\,\beta} = \eta_{\alpha\,\mu}\, \omega^\mu{}_\beta. \tag{33}$$

ζ را خم ی میگیرم که

$$\zeta(0) = O. \tag{34}$$

دیده میشود

$$\{[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)][\zeta(\lambda)]\}^\alpha = \lambda\,\{(\mathsf{D}\zeta^\alpha)(0) + t\,\omega^\alpha{}_\beta\,(\mathsf{D}\zeta^\beta)(0)\} + o(t,\lambda). \tag{35}$$

به این ترتیب،

$$\Big[\Big(\{\mathsf{D}[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]\}(O)\Big)\,[(\mathsf{D}\zeta)(0)]\Big]^\alpha = [(\mathsf{D}\zeta)(0)]^\alpha + t\,\omega^\alpha{}_\beta\,[(\mathsf{D}\zeta)(0)]^\beta + o(t), \tag{36}$$

یا

$$\{\mathsf{D}[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]\}(O)=1+t\,\omega+o(t), \tag{37}$$

که نتیجه میدهد

$$\{\mathsf{D}[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]\}(O)=\exp(t\,\omega). \tag{38}$$

به این ترتیب اثر ِ مشتق ِ شارش ِ Ξ_ω بر بردارها یِ فضا یِ مماس در O یک تبدیل ِ لُرِنتس [7] است. شارش ِ Ξ_ω ژئُدزیک ِ γ_y را به یک ژئُدزیک ِ دیگر تبدیل میکند، و

$$\begin{aligned}\Big(\{\mathsf{D}[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]\}(O)\Big)\,[(\mathsf{D}\gamma_y)(0)]&=\Big(\{\mathsf{D}[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]\}(O)\Big)\,y,\\&=[\exp(t\,\omega)]\,y.\end{aligned} \tag{39}$$

به این ترتیب،

$$[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)][\phi^{-1}(y)]=\phi^{-1}\{[\exp(t\,\omega)]\,y\}. \tag{40}$$

شارش ِ Ξ_ω مثل ِ تبدیل ِ لُرِنتس [7] است.

یک دسته از میدانها یِ کیلینگ هم هستند که بخش ِ پادمتقارن ِ مشتق ِشان در O صفر است. اینها را با Υ_y نشان میدهم، که

$$y=\Upsilon_y(O), \tag{41}$$

و البته از (6) نتیجه میشود

$$(\nabla\Upsilon_y)(O)=0. \tag{42}$$

دیده میشود Υ_y نسبت به y خطی ست. پس

$$\Upsilon_y=y^\mu\,\Upsilon_\mu, \tag{43}$$

که Υ_μ نماد ِ مختصرتر ِ Υ_{e_u} است، و e یک پایه یِ فضا یِ مماس (در O و متناظر با مختصات ِ y) است.

میدان ِ برداری یِ v را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{fl}(\centerdot\, v) = [\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)] \circ [\mathsf{fl}(\centerdot\,\Upsilon_y)] \circ [\mathsf{fl}(-t\,\Xi_\omega)]. \tag{44}$$

شارش ِ v یک ایزُمتری ست، پس v یک میدان ِ کیلینگ [2] است. از (36) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} v(O) &= [\exp(t\,\omega)]\,\Upsilon_y(O),\\ &= [\exp(t\,\omega)]\,y. \end{aligned} \tag{45}$$

از این که Ξ_ω یک میدان ِ کیلینگ [2] است، نتیجه میشود

$$\begin{aligned} (\nabla v)\{[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)](x)\} = &\left[\left(\{\mathsf{D}[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]\}^*\right)^{-1} \otimes \{\mathsf{D}[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]\}\right]\\ &[(\nabla\Upsilon_y)(x)]. \end{aligned} \tag{46}$$

پس،

$$(\nabla v)(O) = 0. \tag{47}$$

به این ترتیب،

$$v = \Upsilon_{[\exp(t\,\omega)]\,y}. \tag{48}$$

نتیجه این که

$$\mathsf{fl}\{\centerdot\,\Upsilon_{[\exp(t\,\omega)]\,y}\} = [\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)] \circ [\mathsf{fl}(\centerdot\,\Upsilon_y)] \circ [\mathsf{fl}(-t\,\Xi_\omega)]. \tag{49}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\left(\mathsf{fl}\{\centerdot\,\Upsilon_{[\exp(t\,\omega)]\,y}\}\right) \circ [\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)] = [\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)] \circ [\mathsf{fl}(\centerdot\,\Upsilon_y)], \tag{50}$$

که نتیجه میدهد

$$\Upsilon_{[\exp(t\,\omega)]\,y}\circ[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]=\{\mathsf{D}[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]\}\,\Upsilon_y. \tag{51}$$

مئلفئی،

$$[\exp(t\,\omega)]^{\beta}{}_{\nu}\,(\Upsilon_\beta)^\alpha\circ[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]=[\exp(t\,\omega)]^{\alpha}{}_{\mu}\,(\Upsilon_\nu)^\mu, \tag{52}$$

یا،

$$(\Upsilon_\beta)^\alpha\circ[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]=[\exp(t\,\omega)]^{\alpha}{}_{\mu}\,(\Upsilon_\nu)^\mu\,[\exp(-t\,\omega)]^{\nu}{}_{\beta}. \tag{53}$$

4 متریک و میدانها یِ کیلینگ در مختصات ِ همطول

محاسبات را در مختصات ِ همطول انجام میدهم. از (40) دیده میشود

$$\partial_\alpha[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]^\mu=[\exp(t\,\omega)]^{\mu}{}_{\alpha}. \tag{54}$$

$[\exp(t\,\omega)]$ یک تبدیل ِ لُرِنتس [7] است. پس،

$$\eta_{\mu\,\nu}\,[\exp(t\,\omega)]^{\mu}{}_{\alpha}\,[\exp(t\,\omega)]^{\nu}{}_{\beta}=\eta_{\alpha\,\beta}. \tag{55}$$

تعریف میکنم

$$h^{\alpha}{}_{\beta}=\eta^{\mu\,\alpha}\,g_{\mu\,\beta}. \tag{56}$$

به این ترتیب (1) میشود

$$h^{\alpha}{}_{\beta}\circ[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]=[\exp(t\,\omega)]^{\alpha}{}_{\mu}\,h^{\mu}{}_{\nu}\,[\exp(-t\,\omega)]^{\nu}{}_{\beta}, \tag{57}$$

یا بستِتر،

$$h\circ[\mathsf{fl}(t\,\Xi_\omega)]=[\exp(t\,\omega)]\,h\,[\exp(t\,\omega)]^{-1}. \tag{58}$$

رابطه یِ (57) کاملَن شبیه ِ رابطه یِ (53) است. پس حلها یِ اینها (برا یِ h و Υ) هم مشابه است.

رابطه یِ (58) این است که به ازا یِ هر تبدیل- ِ-لُرِنتس [7] ِ Λ و هر y،

$$(h\circ\phi^{-1})(\Lambda\, y)=\Lambda\,[(h\circ\phi^{-1})(y)]\,\Lambda^{-1}. \tag{59}$$

در واقع این رابطه برا یِ تبدیلها یِ سره یِ لُرِنتس [7] به دست آمد، یعنی برا یِ آن تبدیلها یِ لُرِنتس [7] که پیوسته به همانی یَند. این تبدیلها انعکاسها را در بر نمیگیرند.

مجموعه یِ آن تبدیلها یِ سره یِ لُرِنتس [7] که y تحت ِ آنها ناوردا ست را با $\mathbb{L}_y$ نشان میدهم. y و $y^\perp$ (فضا یِ عمود بر y) زیرفضاها یِ ناوردا یِ $\mathbb{L}$ اند. دیده میشود

$$(h\circ\phi^{-1})(y)=\Lambda\,[(h\circ\phi^{-1})(y)]\,\Lambda^{-1},\qquad \Lambda\in\mathbb{L}_y. \tag{60}$$

گیرم D بزرگتر از 2 است. در این صورت y تنها-ویژه-بردار ِ همه یِ اعضا یِ $\mathbb{L}_y$ با ویژه-مقدار ِ یک است. در این صورت از (60) دیده میشود y ویژه-بردار ِ $[(h\circ\phi^{-1})(y)]$ است:

$$[(h\circ\phi^{-1})(y)]\,y=p\,y. \tag{61}$$

همچنین، اگر v در $y^\perp$ باشد،

$$\begin{aligned} y\cdot\{[(h\circ\phi^{-1})(y)]\,v\}&=\{[(h\circ\phi^{-1})(y)]\,y\}\cdot v,\\ &=p\,(y\cdot v),\\ &=0, \end{aligned} \tag{62}$$

که نشان میدهد $\{[(h\circ\phi^{-1})(y)]\,y\}$ هم در $y^\perp$ است، یعنی $y^\perp$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ $[(h\circ\phi^{-1})(y)]$ است. سرانجام، تحدید ِ اثر ِ $\mathbb{L}_y$ به $y^\perp$ کاهش ناپذیر است. پس با توجه به لم ِ شور [8] (مثلَن [9]) از (60) نتیجه میشود تحدید ِ $[(h\circ\phi^{-1})(y)]$ به $y^\perp$ متناسب با همانی ست.

اگر y نورگونه نباشد، فضا یِ مماس بر O حاصل- ِ-جمع ِ مستقیم ِ $y^\perp$ و پهنه یِ y است. به این ترتیب، اگر D بزرگتر از 2 باشد و y نورگونه نباشد،

$$[(h\circ\phi^{-1})(y)]^\alpha{}_\beta=q\,\delta^\alpha{}_\beta+\frac{p-q}{y\cdot y}\,y^\alpha\,y_\beta, \tag{63}$$

که p و q تابعها یِ اسکالر َند.

اگر D برابر با 2 باشد، (63) از تقارن تحت ِ فقط تبدیلها یِ سره یِ لُرِنتس [7] نتیجه نمیشود. در این حالت گیرم تبدیلها یِ ناسره یِ لُرِنتس [7] هم تقارن َند. تبدیل ی که y تحت ِ آن ناوردا ست و

همانی نیست، یک ویژه-بردار متناظر با ویژه-مقدار ِ یک دارد، و یک ویژه-بردار متناظر با ویژه-مقدار ِ منها-ی-یک. ویژه-بردار ِ اول خُد ِ y است و ویژه-بردار ِ دوم عمود بر y است. این تبدیل با $[(h\circ\phi^{-1})(y)]$ جابجا میشود و با استدلال ی مشابه با حالت ی که D بزرگتر از 2 بود، رابطه یِ (63) به دست میئاید. به این ترتیب (63) برا یِ همه یِ بُعدها درست است (به شرط ی که در بُعد ِ 2 انعکاسها هم تقارن باشند)، اما همچنان برا یِ وقت ی برقرار است که y نورگونه نباشد. فرض ِ پیوستِگی یِ h این شرط را هم حذف میکند. با این فرضها، (63) برا یِ همه یِ بُعدها و همه یِ y ها برقرار است.

عبارت ی که برا یِ $[(h\circ\phi^{-1})(y)]$ به دست آمد، رابطه یِ (63)، را در (59) میگذارم. نتیجه میشود p و q تابع ِ فقط $(y\cdot y)$ اند. با تعریف ِ

$$Q=\frac{p-q}{y\cdot y}, \tag{64}$$

رابطه یِ (63) میشود

$$[(h\circ\phi^{-1})(y)]^\alpha{}_\beta=(p-Q\,y\cdot y)\,\delta^\alpha{}_\beta+Q\,y^\alpha\,y_\beta, \tag{65}$$

که p و Q تابع ِ فقط $(y\cdot y)$ اند.

از (56) و (65) نتیجه میشود

$$g_{\alpha\,\beta}[\phi^{-1}(y)]=(p-Q\,y\cdot y)\,\eta_{\alpha\,\beta}+Q\,y_\alpha\,y_\beta. \tag{66}$$

این، همراه با (27)، نتیجه میدهد

$$p=1. \tag{67}$$

به این ترتیب،

$$g_{\alpha\,\beta}[\phi^{-1}(y)]=(1-Q\,y\cdot y)\,\eta_{\alpha\,\beta}+Q\,y_\alpha\,y_\beta. \tag{68}$$

مشابه با (65)، برا یِ Υ هم نتیجه میشود

$$[(\Upsilon_\beta\circ\phi^{-1})(y)]^\alpha=(a-B\,y\cdot y)\,\delta^\alpha{}_\beta+B\,y^\alpha\,y_\beta, \tag{69}$$

که a و B تابع ِ فقط $(y\cdot y)$ اند. این که Υ_β میدان ِ کیلینگ [2] است، نتیجه میدهد

$$0 = (\Upsilon_\beta)^\alpha\,\partial_\alpha g_{\mu\,\nu} + [\partial_\mu(\Upsilon_\beta)^\alpha]\,g_{\alpha\,\nu} + [\partial_\nu(\Upsilon_\beta)^\alpha]\,g_{\mu\,\alpha}. \tag{70}$$

از (68) و (69) نتیجه میشود

$$y^\mu\,g_{\mu\,\alpha} = y_\alpha. \tag{71}$$

$$y^\beta\,(\Upsilon_\beta)^\alpha = a\,y^\alpha. \tag{72}$$

رابطه یِ (70) را در $(y^\beta\,y^\mu\,y^\nu)$ ضرب میکنم. نتیجه میشود

$$\begin{aligned}0 &= y^\mu\,y^\nu\,(y\cdot\partial)g_{\mu\,\nu} + 2\,y^\beta\,y_\alpha\,(y\cdot\partial)(\Upsilon_\beta)^\alpha,\\ &= (y\cdot\partial-2)(g_{\mu\,\nu}\,y^\mu\,y^\nu) + 2\,y_\alpha\,(y\cdot\partial-1)[y^\beta\,(\Upsilon_\beta)^\alpha],\\ &= (y\cdot\partial-2)(y\cdot y) + 2\,y_\alpha\,(y\cdot\partial-1)(a\,y^\alpha),\\ &= 0 + 2\,(y\cdot y)\,(y\cdot\partial)a,\\ &= 4\,(y\cdot y)^2\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}(y\cdot y)}.\end{aligned} \tag{73}$$

در برابری یِ پیش از آخر این به کار رفته که

$$(y\cdot\partial)y^\alpha = y^\alpha. \tag{74}$$

در برابری یِ آخر هم این که a تابع ِ فقط $(y\cdot y)$ است. از (73) نتیجه میشود a ثابت است. از (41) و (43) هم نتیجه میشود

$$(\Upsilon_\beta)^\alpha(O) = \delta^\alpha_\beta. \tag{75}$$

به این ترتیب

$$a = 1, \tag{76}$$

و از اینجا

$$[(\Upsilon_\beta \circ \phi^{-1})(y)]^\alpha = (1 - B\, y \cdot y)\, \delta^\alpha{}_\beta + B\, y^\alpha\, y_\beta, \tag{77}$$

با استفاده از (68) و (77)،

$$\begin{aligned}(\Upsilon_\beta)^\alpha\, \partial_\alpha g_{\mu\,\nu} &= (1 - B\, y \cdot y)\, Q\, (\eta_{\mu\,\beta}\, y_\nu + \eta_{\nu\,\beta}\, y_\mu - 2\, \eta_{\mu\,\nu}\, y_\beta)\\ &\quad + 2\, \left[B\, Q + \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}(y \cdot y)}\right]\, (y_\mu\, y_\nu - \eta_{\mu\,\nu})\, y_\beta. \end{aligned}\tag{78}$$

$$\begin{aligned}g_{\mu\,\alpha}\, \partial_\nu (\Upsilon_\beta)^\alpha + g_{\alpha\,\nu}\, \partial_\mu (\Upsilon_\beta)^\alpha &= \left[-B + 2\, Q\, B\, y \cdot y - 2\, (1 - Q\, y \cdot y)\, \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}(y \cdot y)}\, y \cdot y\right]\\ &\quad (\eta_{\mu\,\beta}\, y_\nu + \eta_{\nu\,\beta}\, y_\mu - 2\, \eta_{\mu\,\nu}\, y_\beta)\\ &\quad + 2\, \left[2\, (1 - Q\, y \cdot y)\, \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}(y \cdot y)} - Q\, B\right]\\ &\quad (y_\mu\, y_\nu - \eta_{\mu\,\nu})\, y_\beta. \end{aligned}\tag{79}$$

اینها را در (70) میگذارم:

$$Q - (1 - Q\, y \cdot y)\, B - 2\, (1 - Q\, y \cdot y)\, \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}(y \cdot y)}\, y \cdot y = 0. \tag{80}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}(y \cdot y)} + 2\, (1 - Q\, y \cdot y)\, \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}(y \cdot y)} = 0. \tag{81}$$

از معادله یِ اول نتیجه میشود

$$\frac{1}{1 - Q\, y \cdot y} = 1 + \left[B + 2\, \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}(y \cdot y)}\, y \cdot y\right]\, y \cdot y. \tag{82}$$

تعریف میکنم

$$\rho = \sqrt{|y \cdot y|}. \tag{83}$$

$$q = 1 - Q\, y \cdot y. \tag{84}$$

$$f = \frac{1 - B\, y \cdot y}{\rho}. \tag{85}$$

رابطه یِ (84) در واقع هم ان (64) است، که در آن (67) به کار رفته است. با اینها (82) میشود

$$\frac{1}{q} = -\rho^2\, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}. \tag{86}$$

اینها را در (81) میگذارم:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{1-q}{\rho^2}\right) + 2\,q\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{1-\rho\,f}{\rho^2}\right),\\
&= -\frac{2}{\rho^3} + \frac{2\,q}{\rho^3} - \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\rho} - \frac{4\,q}{\rho^3} - \frac{2\,q}{\rho}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho} + \frac{2\,q\,f}{\rho^2},\\
&= \frac{q}{\rho^2}\,\left(-\frac{2}{\rho} - \frac{1}{q}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\rho} + 2\,f\right),\\
&= \frac{q}{\rho^2}\,\left[\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\right)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\rho^2} + 2\,f\right].
\end{aligned} \tag{87}
$$

به این ترتیب،

$$
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\rho^2} + 2\,f\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho} = 0, \tag{88}
$$

که نتیجه میدهد

$$
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho} + f^2 = -\ell^2. \tag{89}
$$

ℓ^2 ثابت است، ولی لازم نیست مثبت باشد. از (89) نتیجه میشود

$$
f = \frac{1}{\ell}\,\cot\frac{\rho-\rho_0}{\ell}. \tag{90}
$$

ρ_0 یک ثابت است. از (85) دیده میشود f در حد ِ $(\rho\to 0)$ مثل ِ $(1/\rho)$ رفتار میکند. از اینجا معلوم میشود ρ_0 صفر است. به این ترتیب،

$$
f = \frac{1}{\ell}\,\cot\frac{\rho}{\ell}. \tag{91}
$$

$$
q = \left(\frac{\ell}{\rho}\right)^2\,\sin^2\frac{\rho}{\ell}. \tag{92}
$$

پارامتر ِ K را چنین تعریف میکنم.

$$
K\,y\cdot y = \left(\frac{\rho}{\ell}\right)^2. \tag{93}
$$

به این ترتیب،

$$
g_{\alpha\,\beta}\,\mathrm{d}y^\alpha\,\mathrm{d}y^\beta = \frac{\sin^2\sqrt{K\,y\cdot y}}{K\,y\cdot y}\,(\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}y) + \left(1-\frac{\sin^2\sqrt{K\,y\cdot y}}{K\,y\cdot y}\right)\,\frac{(y\cdot\mathrm{d}y)^2}{y\cdot y}. \tag{94}
$$

$(K\, y\cdot y)$ ممکن است مثبت یا منفی (یا صفر) باشد. اما طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا حقیقی میمانَد. از جمله دیده میشود وقت ی $(K\, y\cdot y)$ کوچک است،

$$g_{\alpha\,\beta} = \eta_{\alpha\,\beta} + \frac{K}{3}\,(y_\alpha\, y_\beta - \eta_{\alpha\,\beta}\, y\cdot y) + o(K\, y\cdot y). \tag{95}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} R_{\alpha\,\mu\,\beta\,\nu}(O) &= -\frac{1}{2}\,(\partial_\mu\partial_\nu g_{\alpha\,\beta} - \partial_\mu\partial_\beta g_{\alpha\,\nu} - \partial_\alpha\partial_\nu g_{\mu\,\beta} + \partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\,\nu})(O), \\ &= K\,(\eta_{\alpha\,\beta}\,\eta_{\mu\,\nu} - \eta_{\alpha\,\nu}\,\eta_{\mu\,\beta}), \end{aligned} \tag{96}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{Rc}_{\alpha\,\beta}(O) = (D-1)\,K\,\eta_{\alpha\,\beta}. \tag{97}$$

$$\mathcal{R}(O) = D\,(D-1)\,K. \tag{98}$$

Rc تانسُر ِ ریچی [10]، و $\mathcal{R}$ خمش ِ اسکالر است. تقارن ِ متریک تقارن ِ خمش هم هست. به این ترتیب،

$$R_{\alpha\,\mu\,\beta\,\nu} = K\,(g_{\alpha\,\beta}\, g_{\mu\,\nu} - g_{\alpha\,\nu}\, g_{\mu\,\beta}). \tag{99}$$

$$\mathsf{Rc}_{\alpha\,\beta} = (D-1)\,K\,g_{\alpha\,\beta}. \tag{100}$$

$$\mathcal{R} = D\,(D-1)\,K. \tag{101}$$

5 پانوشتها

[1] Levi-Civita

[2] Killing

[3] Riemann

[4] Bianchi

[5] Steven Weinberg; "Gravitation and cosmology; principles and applications of the general theory of relativity" (John Wiley & Sons, 1972)

[6] محمد خرمی؛ «خمش، حجم، مساحت»؛ (2016/01/28) X1-113

[7] Lorentz

[8] Schur

[9] Frederick W. Byron, Jr. & Robert W. Fuller; "Mathematics of classical and quantum physics" (Dover, 1979) chapter 10

[10] Ricci