X1-116 (2016/05/26)

پخی یِ زمین، عرض ِ جغرافیایی، و طول- ِ-کمان

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

عرض ِ جغرافیایی برا یِ زمین با در-نظر-گرفتن ِ پخی یِ آن تعریف میشود. طول- ِ-کمان بر حسب ِ این عرض ِ جغرافیایی محاسبه میشود.

1 عرض ِ جغرافیایی

زمین را یک بیضیگون ِ دوار میگیرم که نیمقطرها یِ استوایی و قطبی یَش، به ترتیب، a و b است. مختصات را چنان میگیرم که مبدئ مرکز ِ زمین و محور ِ z محور ِ قطبی باشد، و محور ِ x از نصف‌النهار ِ مبدئ بگذرد. یک پارامتربندی برا یِ نقاط ِ سطح ِ زمین این است.

$$\rho = a\,\cos\zeta, \tag{1}$$

$$z = b\,\sin\zeta, \tag{2}$$

که (ρ, ϕ, z) مختصات ِ استوانِئی یَند. ϕ طول ِ جغرافیایی ست. اگر زمین پخ نبود (b با a برابر بود) ζ هم ان عرض ِ جغرافیایی میشد. λ (عرض ِ جغرافیایی) را زاویه یِ عمود بر سطح ِ زمین با استوا

تعریف میکنم. $\hat{\boldsymbol{n}}$ (بردار ِ یکه یِ عمود بر سطح) بر بردارها یِ مماس بر سطح عمود است:

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta} = 0, \tag{3}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = 0, \tag{4}$$

که $\boldsymbol{r}$ بردار ِ مکان است. به این ترتیب،

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot [(-a\,\sin\zeta)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (b\,\cos\zeta)\,\hat{\boldsymbol{z}}] = 0. \tag{5}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot [(a\,\cos\zeta)\,\hat{\boldsymbol{\phi}}] = 0. \tag{6}$$

نتیجه میشود

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{(b\,\cos\zeta)\hat{\boldsymbol{\rho}} + (a\,\sin\zeta)\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{a^2\,\sin^2\zeta + b^2\,\cos^2\zeta}}, \tag{7}$$

و از آنجا،

$$\tan\lambda = \frac{a}{b}\,\tan\zeta. \tag{8}$$

2 طول ِ کمان

طول ِ کمان را با s نشان میدهم:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2, \tag{9}$$

که با استفاده از (1) و (2) و (8)، میشود

$$\mathrm{d}s^2 = S_\lambda^2\,\mathrm{d}\lambda^2 + S_\phi^2\,\mathrm{d}\phi^2, \tag{10}$$

که S_λ و S_ϕ مشتق ِ طول- ِ-کمان نسبت به، به ترتیب، λ و ϕ یَند.:

$$S_\lambda = \frac{a^2\,b^2}{(a^2\,\cos^2\lambda + b^2\,\sin^2\lambda)^{3/2}}. \tag{11}$$

$$S_\phi = \frac{a^2\,\cos\lambda}{(a^2\,\cos^2\lambda + b^2\,\sin^2\lambda)^{1/2}}. \tag{12}$$

3 طول- ِ-کمان بر حسب ِ عرض ِ جغرافیایی

S_ϕ و S_λ مستقل از ϕ یَند و به فقط λ بستِگی دارند. محیط ِ یک مدار با عرض ِ جغرافیایی یِ λ برابر با $[2\,\pi\,S_\phi(\lambda)]$ است، دیده میشود S_ϕ با افزایش ِ اندازه یِ λ کم میشود، که هم ان است که انتظار میرفت و پخ-بودن بر این رفتار ِ کیفی اثر ی ندارد.

اگر پخی نبود (بیضی-گون کره بود)، S_λ ثابت میشد. این یعنی فاصله یِ دُ نقطه از هم که بر یک نصف‌النهار باشند، به فقط اختلاف ِ عرض- ِ-جغرافیاییها یِ آن دُنقطه وابسته میبود. وقت ی پخی هست، این فاصله به جا یِ این دُ-نقطه هم وابسته است. (12) را میشود نوشت.

$$S_\lambda = a^2\,b^2\,\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2-b^2}{2}\,\cos(2\,\lambda)\right]^{-3/2}. \tag{13}$$

اگر شعاع ِ استوایی بیشتر باشد (مثل ِ زمین)، با دور-شدن از استوا S_λ زیاد میشود: فاصله یِ دُ-نقطه بر یک نصف‌النهار و با اختلاف- ِ-عرض- ِ-جغرافیایی یِ معین، با دور-شدن از استوا زیاد میشود. دیده میشود

$$S_\lambda = \begin{cases} \dfrac{b^2}{a}, & \lambda = 0 \\ \\ \dfrac{a^2}{b}, & \lambda = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}. \tag{14}$$

اگر a و b به هم نزدیک باشند (که برا یِ زمین چنین است)، بسط تا مرتبه یِ یک نسبت به این اختلاف تقریب ِ خوب ی ست:

$$a = R\,\left(1+\frac{q}{2}\right). \tag{15}$$

$$b = R\,\left(1-\frac{q}{2}\right). \tag{16}$$

$$S_\lambda = R\,\left\{1+q\,\left[-\frac{3}{2}\,\cos(2\,\lambda)\right]+o(q)\right\}. \tag{17}$$

$$S_\phi = (R\,\cos\lambda)\left\{1+q\,\left[1-\frac{1}{2}\cos(2\,\lambda)\right]+o(q)\right\}. \tag{18}$$

از جمله نتیجه میشود

$$P_{\mathrm{m}} = (2\,\pi\,R)\,[1 + o(q)], \tag{19}$$

$$P_{\mathrm{e}} = (2\,\pi\,R)\,\left[1 + \frac{q}{2} + o(q)\right], \tag{20}$$

که P_{m} و P_{e} محیط ِ، به ترتیب، نصف‌النهاری و استوایی یَند. برا یِ زمین، از مثلَن [1]،

$$R = 6370\,\mathrm{km}. \tag{21}$$

$$q = 21\,\mathrm{km}. \tag{22}$$

4 پانوشتها

[1] Kenneth R. Lang; “Astrophysical data: planets and stars” (Springer Verlag, 1992) Chapter 2