X1-117 (2016/07/28)

سْپینُرها و فضا یِ خمیده

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

هندسه یِ سْپینُرها و ابزارها یِ مربوط به آنها در فضا یِ خمیده بررسی میشود.

0 درامد

سْپینُرها اعضا یِ فضا یِ نمایشها یِ سْپینی یِ گروه ِ متعامد َند. یک میدان ِ سْپینُری تابع ی از فضا ست که مقدار َش در هر نقطه یک سْپینُر است. مثل ِ میدانها یِ برداری، مئلفِها یِ یک میدان ِ سْپینُری به پایه بستِگی دارند. پایه یِ فضا یِ سْپینُرها هم ان پایه یِ فضا یِ برداری (فضا یِ مماس) نیست، اما متناظر با یک تبدیل- ِ-پایه یِ متعامد ِ Λ در فضا یِ برداری یک تبدیل- ِ-پایه یِ U در فضا یِ سْپینُرها هست، که نمایش ِ سْپینُری یِ Λ ست. این تبدیل- ِ-پایه مئلفِها یِ یک میدان ِ سْپینُری را عوض میکند، چنان که تبدیل- ِ-پایه یِ Λ مئلفِها یِ یک میدان ِ برداری را عوض میکند. همچنین، متناظر با یک تبدیل ِ متعامد ِ (مُضعی یِ) Λ که بر میدانها یِ برداری اثر میکند، یک تبدیل ِ U هست که بر میدانها یِ سْپینُری اثر میکند.

میدانپایه یِ میدانها یِ برداری (میدان ی که در هر نقطه یک پایه برا یِ فضا یِ بردارها ست) دلبخاه است. البته برا یِ کارها یی مثل ِ مشتقگیری بهتر است هموار باشد. اما دُ گونه میدانپایه هستند که هر یک

بعض یِ کارها را سادتر میکنند: میدانپایِها یِ مختصاتی و میدانپایِها یِ متریک-دکَرتی. میدانپایِها یِ مختصاتی سرعتها یِ خمها یِ مختصاتی یَند (خمها یی که بر آنها یک مختصه با آهنگ ِ یک تغییر میکند و بقیه یِ مختصات ثابت َند)، و میدانپایِها یِ متریک-دکَرتی آنهایی یَند که حاصل- ِ-ضربها یِشان ثابت است. مئلفِها یِ متناظر با میدانپایِها یِ مختصاتی را با شاخصها یِ پریمدار، و مئلفِها یِ متناظر با میدانپایِها یِ متریک-دکَرتی را با شاخصها یِ بدون- ِ-پریم نشان میدهم. از جمله،

$$e^a = g^a_{\mu'}\,\mathbf{d}\,x^\mu, \tag{1}$$

که g متریک است. رابطه یِ تبدیل- ِ-متعامد ِ پیوسته-به-همانی یِ Λ و نمایش ِ سْپینُری یِ آن U چنین است.

$$\Lambda = \exp(\theta). \tag{2}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\,\theta^{a\,b}\,M_{b\,a}. \tag{3}$$

$$U = \exp\left(\frac{1}{2}\,\theta^{a\,b}\,\sigma_{b\,a}\right). \tag{4}$$

M و σ نمایشها یِ، به ترتیب، برداری و سْپینُری یِ مولدها یِ گروه ِ متعامد َند:

$$(M_{a\,b})^c{}_d = g_{a\,d}\,\delta^c_b - g_{b\,d}\,\delta^c_a. \tag{5}$$

$$\sigma_{a\,b} = -\frac{1}{4}\,[\gamma_a, \gamma_b]. \tag{6}$$

γ_a ها ماتریسها یِ دیرَک [1] َند، که ثابت َند و

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\,g_{a\,b}. \tag{7}$$

مولدها این روابط ِ جابِجایی را بر میئاورَند.

$$[M_{a\,b}, M_{c\,d}] = g_{a\,c}\,M_{b\,d} - g_{b\,c}\,M_{a\,d} + g_{a\,d}\,M_{c\,b} - g_{b\,d}\,M_{c\,a}. \tag{8}$$

$$[\sigma_{a\,b}, \sigma_{c\,d}] = g_{a\,c}\,\sigma_{b\,d} - g_{b\,c}\,\sigma_{a\,d} + g_{a\,d}\,\sigma_{c\,b} - g_{b\,d}\,\sigma_{c\,a}. \tag{9}$$

همچنین،

$$[\sigma_{a\,b}, \gamma_c] = g_{a\,c}\,\gamma_b - g_{b\,c}\,\gamma_a, \tag{10}$$

یا

$$[\sigma_{a\,b}, \gamma_c] = -[(M_{a\,c})_b{}^d - (M_{b\,c})_a{}^d]\,\gamma_d. \tag{11}$$

از جمله دیده میشود

$$U^{-1}\,\gamma_c\,U = \Lambda_c{}^d\,\gamma_d. \tag{12}$$

برا یِ متریک ی که نشانگان َش $(-,+,+,\dots)$ است (متریک ِ مینکُفسکی [2]) یک ماتریس ِ ثابت ِ β هست که

$$\beta^\dagger = \beta. \tag{13}$$

$$\beta^{-1} = \beta. \tag{14}$$

$$(\gamma^a)^\dagger\,\beta = -\beta\,\gamma^a. \tag{15}$$

مثلَن اگر متریک قطری باشد میشود γ^0 را پادارمیتی و بقیه یِ ماتریسها یِ دیرَک [1] را اِرمیتی گرفت. در این صورت β یک مضرب ِ مُهومی از γ^0 میشود.

چیزها یی مربوط به اینها را میشود در [3] و [4] یافت.

1 هموستار ِ سْپینُری

هموستار مشتق ِ میدانپایه را تعیین میکند:

$$\boldsymbol{\nabla}_\mu\,e_\nu = \Gamma^\rho{}_{\mu\,\nu}\,e_\rho, \tag{16}$$

یا

$$\boldsymbol{\nabla}_\mu\,e^\rho = -\Gamma^\rho{}_{\mu\,\nu}\,e^\nu. \tag{17}$$

اینها برا یِ هر پایه ای درست َند. البته هموستار به پایه بستِگی دارد. اگر هموستار با متریک سازگار باشد، در یک میدانپایه یِ متریک-دِکَرتی

$$\Gamma^c{}_a{}^b = -\Gamma^b{}_a{}^c. \tag{18}$$

هوستار ِ سْپینُری برا یِ یک هموستار ِ سازگار-با-متریک تعریف میشود:

$$\Gamma_a = \frac{1}{2}\,\Gamma^c{}_a{}^b\,\sigma_{b\,c}. \tag{19}$$

در واقع هموستار ِ متناظر با هر گونه میدان ی به هم ین شکل تعریف میشود؛ فقط باید به جا یِ مولدها یِ σ مولدها یِ متناظر با نمایش ی از گروه ِ متعامد را گذاشت که بر آن میدان اثر میکند. مشتق ِ هموردا یِ سْپینُر ِ ψ چنین میشود.

$$\boldsymbol{\nabla}_a\,\psi = (\partial_a + \Gamma_a)\,\psi. \tag{20}$$

مشتق ِ هموردا برا یِ ماتریسها یِ دیرَک [1] چنان تعریف میشود که $(\gamma\,\psi)$ مثل ِ ضرب ِ تانسِری یِ یک بردار در یک سْپینُر باشد، یعنی

$$[\boldsymbol{\nabla}_a\,(\gamma\,\psi)]^b = (\partial_a + \Gamma_a)\,(\gamma^b\,\psi) + \Gamma^b{}_{a\,c}\,(\gamma^c\,\psi). \tag{21}$$

با استفاده از

$$[\boldsymbol{\nabla}_a\,(\gamma\,\psi)]^b = [(\boldsymbol{\nabla}_a\,\gamma)^b]\,\psi + \gamma^b\,(\boldsymbol{\nabla}_a\,\psi), \tag{22}$$

و (20) نتیجه میشود

$$(\boldsymbol{\nabla}_a\,\gamma)^b = \partial_a\,\gamma^b + [\Gamma_a, \gamma^b] + \Gamma^b{}_{a\,c}\,\gamma^c. \tag{23}$$

رابطه یِ (10) نشان میدهد

$$[\Gamma_a, \gamma^b] = -\Gamma^b{}_{a\,c}\,\gamma^c. \tag{24}$$

به این ترتیب مجموع ِ دُ-جمله یِ آخر ِ طرف ِ راست ِ (23) صفر است. ثابت-بودن ِ ماتریسها یِ دیرَک [1] هم نشان میدهد جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (23) صفر است. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\nabla}_a\,\gamma = 0. \tag{25}$$

از (20) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\nabla}_a\,\psi^\dagger = \partial_a\,\psi^\dagger + \psi^\dagger\,(\Gamma_a)^\dagger. \tag{26}$$

از (6) و (15) هم نتیجه میشود

$$(\Gamma_a)^\dagger\,\beta = -\beta\,\Gamma_a. \tag{27}$$

به این ترتیب،

$$(\boldsymbol{\nabla}_a\,\psi^\dagger)\,\beta = (\partial_a\,\psi^\dagger)\,\beta - (\psi^\dagger\,\beta)\,\Gamma_a, \tag{28}$$

یا، با استفاده از این که β ثابت است،

$$\boldsymbol{\nabla}_a(\psi^\dagger\,\beta) = \partial_a(\psi^\dagger\,\beta) - (\psi^\dagger\,\beta)\,\Gamma_a + \psi^\dagger\,\boldsymbol{\nabla}_a\,\beta. \tag{29}$$

مشتق ِ هموردا ی ِ β را صفر میگیرم:

$$\boldsymbol{\nabla}_a\,\beta = 0, \tag{30}$$

و $\bar\psi$ را چنین تعریف میکنم.

$$\bar\psi = \psi^\dagger\,\beta. \tag{31}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\nabla}_a\,\bar\psi = \partial_a\,\bar\psi - \bar\psi\,\Gamma_a. \tag{32}$$

صفر-بودن ِ مشتق ِ هموردا ی ِ β را، که با (32) همئرز است، میشد از این به دست آورد که $(\bar\psi\,\psi)$ اسکالر است. پس

$$\boldsymbol{\nabla}_a(\bar\psi\,\psi) = \partial_a(\bar\psi\,\psi), \tag{33}$$

که نتیجه میدهد

$$(\boldsymbol{\nabla}_a\,\bar\psi)\psi = (\partial_a\,\bar\psi - \bar\psi\,\Gamma_a)\psi. \tag{34}$$

2 میدانها یِ تانسُری با تابعها یِ مجذوری از سْپینُرها

متناظر با تبدیل ِ متعامد ِ پیوسته-به-همانی یِ Λ، سْپینُر ِ ψ به $\tilde{\psi}$ تبدیل میشود، که

$$\tilde{\psi} = U\,\psi. \tag{35}$$

از (6) و (15) نتیجه میشود تبدیل-یافته یِ $\bar{\psi}$ چنین است.

$$\bar{\tilde{\psi}} = \tilde{\psi}\,U^{-1}. \tag{36}$$

تعریف میکنم

$$T^{a_1\cdots a_k} = \bar{\psi}\,\gamma^{a_1}\cdots\gamma^{a_k}\,\psi. \tag{37}$$

دیده میشود

$$\tilde{T}^{a_1\cdots a_k} = \bar{\psi}\,U^{-1}\,\gamma^{a_1}\cdots\gamma^{a_k}\,U\,\psi, \tag{38}$$

که با استفاده از (12) میشود

$$\tilde{T}^{a_1\cdots a_k} = \Lambda^{a_1}{}_{b_1}\cdots\Lambda^{a_k}{}_{b_k}\,T^{b_1\cdots b_k}. \tag{39}$$

پس $T^{a_1\cdots a_k}$ ها مثل ِ مئلفِها یِ یک تانسر ِ رتبه یِ k تبدیل میشوند.

از (20) و (34) هم نتیجه میشود

$$(\boldsymbol{\nabla}_b\,T)^{a_1\cdots a_k} = \partial_b\,T^{a_1\cdots a_k} - \bar{\psi}[\Gamma_b,\gamma^{a_1}\cdots\gamma^{a_k}]\psi, \tag{40}$$

که با استفاده از (24) میشود

$$(\boldsymbol{\nabla}_b\,T)^{a_1\cdots a_k} = \partial_b\,T^{a_1\cdots a_k} + \sum_{j=1}^{k}\Gamma^{a_j}{}_{b\,c}\,T^{a_1\cdots a_{j-1}\,c\,a_{j+1}\cdots a_k}. \tag{41}$$

مشتق ِ هموردا یِ T هم مثل ِ مشتق ِ هموردا یِ یک تانسر ِ رتبه یِ k است.

3 هموستار ِ لِوی-چیویتا

هموستار ِ لِوی-چیویتا [5] هموستار ی ست که با متریک سازگار است و پیچش ِ متناظر با آن هم صفر است. سازگاری با متریک، بر حسب ِ یک میدانپایه یِ متریک-دِکَرتی هم ان (18) است. صفر-بودن ِ پیچش هم میشود

$$\mathbf{d}\, e^a + \Gamma^a{}_{b\,c}\, e^b \wedge e^c = 0, \tag{42}$$

یا مثلفِئی

$$\Gamma^a{}_{b\,c} - \Gamma^a{}_{c\,b} = g^{\mu}_{b}\, \partial_c\, g^{a}_{\mu'} - g^{\mu'}_{c}\, \partial_b\, g^{a}_{\mu'}. \tag{43}$$

این رابطه همراه با 18 هموستار ِ لِوی-چیویتا [5] را به طُر ِ یکتا مشخص میکند. برا یِ محاسبه یِ صریح ِ مثلفِها یِ این هموستار، در (43) شاخص ِ a را پایین میئاورم و شاخصها را دُری به هم تبدیل میکنم:

$$\Gamma_{a\,b\,c} - \Gamma_{a\,c\,b} = g^{\mu'}_{b}\, \partial_c\, g_{a\,\mu'} - g^{\mu'}_{c}\, \partial_b\, g_{a\,\mu'}. \tag{44}$$

$$\Gamma_{b\,c\,a} - \Gamma_{b\,a\,c} = g^{\mu'}_{c}\, \partial_a\, g_{b\,\mu'} - g^{\mu'}_{a}\, \partial_c\, g_{b\,\mu'}. \tag{45}$$

$$\Gamma_{c\,a\,b} - \Gamma_{c\,b\,a} = g^{\mu'}_{a}\, \partial_b\, g_{c\,\mu'} - g^{\mu'}_{b}\, \partial_a\, g_{c\,\mu'}. \tag{46}$$

رابطه یِ اول از مجموع ِ رابطِها یِ دوم و سوم کم میکنم. با استفاده از حاصل و (18)، نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\Gamma_{c\,a\,b} = \frac{1}{2}\,[&(g^{\mu'}_{c}\, \partial_a\, g_{b\,\mu'} - g^{\mu'}_{b}\, \partial_a\, g_{c\,\mu'})\\ &+ g^{\mu'}_{a}\,(\partial_b\, g_{c\,\mu'} - \partial_c\, g_{a\,\mu'}) + (g^{\mu'}_{c}\, \partial_b - g^{\mu'}_{b}\, \partial_c)\, g_{a\,\mu'}].\end{aligned} \tag{47}$$

4 پانوشتها

[1] Dirac

[2] Minkowski

[3] Mikio Nakahara; “Geometry, topology and physics” (Institute of Physics Publishing, 1995) chapter 7

[4] محمد خرمی؛ «یُنها یِ هیدرُژن- گونه، و سْپینُرها یِ کروی»؛ (2004/02/21) X1-022

[5] Levi-Civita