X1-118 (2016/08/27)

نیرو یِ الکتریکی یِ وارد بر بارها یِ متمرکز

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

نیرو یِ الکتریکی یِ وارد بر بارها یِ متمرکز بررسی میشود. نشان داده میشود نیرو یِ وارد بر لوله‌ها یِ نازک ِ باردار، وقت ی کلفتی یِ لوله به صفر بگراید و چگالی یِ طولی یِ بار صفر نشود، بینهایت میشود.

0 درامد

در محاسبه یِ میدان ِ الکتریکی یِ وارد بر یک بار، میدان ِ خُد ِ آن بار را نباید به حساب آورد: نیرو یِ وارد بر یک بار ِ نقطِئی برابر است با میدان ِ حاصل از بارها یِ دیگر، ضرب ِ در مقدار ِ آن بار ِ نقطِئی. این کار (کنار-گذاشتن ِ میدان ِ حاصل از خُد ِ آن بار) برا یِ بارها یِ نقطِئی ساده است، اما برا یِ چشمه‌ها یِ پیوسته نَ لزومن. یک راه این است که برا یِ محاسبه یِ میدان ِ مئثر در نقطه یِ $\boldsymbol{r}_0$، یک مجموعه یِ $\mathfrak{m}$ شامل ِ آن نقطه کنار گذاشته شود، و میدان ِ حاصل از بقیه یِ بارها در $\mathfrak{m}$ حساب شود. این میدان را با $\boldsymbol{E}_\mathfrak{m}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{E}_\mathfrak{m}(\boldsymbol{r}) = K\int_{\mathfrak{M}-\mathfrak{m}} \mathrm{d}\mu'\,\frac{\chi(\boldsymbol{r}')\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}. \tag{1}$$

μ اندازه یِ انتگرالگیری، و χ چگالی-یِ-بار ِ متناظر با آن است. K ثابت ِ نیرو یِ الکتریکی ست. $\mathfrak{M}$ مجموعه یِ شامل ِ کل ِ بارها ست، که ممکن است 3 یا کمتر بُعدی باشد. برا یِ محاسبه یِ نیرو یِ وارد بر $\mathfrak{m}$، این میدان را باید در چگالی-یِ-بار ضرب کرد و از آن بر $\mathfrak{m}$ انتگرال گرفت. حاصل را با $\boldsymbol{F}_\mathfrak{m}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{F}_\mathfrak{m} = \int_\mathfrak{m} \mathrm{d}\mu\, \chi(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{E}_\mathfrak{m}(\boldsymbol{r}), \tag{2}$$

یا

$$\boldsymbol{F}_\mathfrak{m} = K \int_\mathfrak{m} \mathrm{d}\mu \int_{\mathfrak{M}-\mathfrak{m}} \mathrm{d}\mu'\, \frac{\chi(\boldsymbol{r})\,\chi(\boldsymbol{r}')\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}. \tag{3}$$

برا یِ محاسبه یِ میدان ِ مئثر، این نیرو را بر $Q_\mathfrak{m}$ (بار ِ $\mathfrak{m}$) تقسیم میکنم. اگر حد ِ خارج- ِ-قسمت وقت یِ $\mathfrak{m}$ به صفر میگراید (یعنی همه یِ ابعاد َش به صفر میگراید) وجود داشت، آن حد هم ان $\boldsymbol{E}_\mathfrak{r}$ (میدان ِ مئثر) است:

$$Q_\mathfrak{m} = \int_\mathfrak{m} \mathrm{d}\mu\, \chi(\boldsymbol{r}). \tag{4}$$

$$\boldsymbol{E}_\mathfrak{r}(\boldsymbol{r}_0) = \lim_{\mathfrak{m}\to 0} \frac{\boldsymbol{F}_\mathfrak{m}}{Q_\mathfrak{m}}. \tag{5}$$

اگر حد ِ $\boldsymbol{E}_\mathfrak{m}(\boldsymbol{r}_0)$ در $\mathfrak{m}$ به صفر وجود داشته باشد، یک راه ِ دیگر برا یِ محاسبه یِ $\boldsymbol{E}_\mathfrak{r}(\boldsymbol{r}_0)$ به دست میئاید. گیرم

$$\lim_{\mathfrak{m}\to 0}[\boldsymbol{E}_\mathfrak{m}(\boldsymbol{r}_0)] = \boldsymbol{E}_\mathfrak{s}(\boldsymbol{r}_0). \tag{6}$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_\mathfrak{m} &= \int_\mathfrak{m} \mathrm{d}\mu\, \chi_\mu\, [\boldsymbol{E}_\mathfrak{s}(\boldsymbol{r}_0) + o(\mathfrak{m})], \\ &= Q_\mathfrak{m}\, \boldsymbol{E}_\mathfrak{s}(\boldsymbol{r}_0) + o(\mathfrak{m}), \end{aligned} \tag{7}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{E}_\mathfrak{r}(\boldsymbol{r}_0) = \boldsymbol{E}_\mathfrak{s}(\boldsymbol{r}_0). \tag{8}$$

1 چشمه یِ سه-بُعدی

اگر $\mathfrak{M}$ سه-بُعدی باشد، حد ِ $\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{r}_0)$ در $(\mathfrak{m}\to 0)$ وجود دارد. علت این است که در (1) انتگرالده متناسب با $|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}'|^{-2}$ تغییر میکند و در عنصر-ِ-حجم ِ $\mathrm{d}\mu'$ یک ضریب ِ $|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|^2$ هست. پس انتگرالده ضرب در عنصر-ِ-حجم مثل ِ $\mathrm{d}|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|$ رفتار میکند. در نتیجه انتگرال همگرا ست. در این حالت

$$\lim_{\mathfrak{m}\to 0}[\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{r}_0)]=K\int_{\mathfrak{M}}\mathrm{d}\mu'\,\frac{\chi(\boldsymbol{r}')\,(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}'|^3}. \tag{9}$$

یعنی جداکردن ِ $\mathfrak{m}$ از ناحیه یِ انتگرالگیری لازم نیست:

$$\boldsymbol{E}_{\mathfrak{r}}(\boldsymbol{r}_0)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0), \tag{10}$$

که $\boldsymbol{E}$ هم ان میدان ی ست که با انتگرالگیری یِ ساده به دست میئاید.

2 چشمه یِ دُ-بُعدی

اگر $\mathfrak{M}$ دُ-بُعدی باشد، حد ِ $\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{r}_0)$ در $(\mathfrak{m}\to 0)$ وجود ندارد. علت این است که در (1) انتگرالده متناسب با $|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}'|^{-2}$ تغییر میکند و در عنصر-ِ-مساحت ِ $\mathrm{d}\mu'$ یک ضریب ِ $|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|$ هست. پس انتگرالده ضرب در عنصر-ِ-حجم مثل ِ $|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|^{-1}\,\mathrm{d}|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|$ رفتار میکند. در نتیجه انتگرال واگرا ست. در این حالت برا یِ $\boldsymbol{r}$ ها یِ درون ِ $\mathfrak{m}$ و نزدیک به مرز ِ $\mathfrak{m}$،

$$\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{r})=\mathfrak{a}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\ln\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{\mathfrak{b}}+O(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{11}$$

که $\boldsymbol{r}'$ نقطه ای در مرز ِ $\mathfrak{m}$ است که فاصله اَش تا $\boldsymbol{r}$ کمینه است، و $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ثابت َند. برا یِ به-دست-آوردن ِ این رابطه، مثلَن میشود بخش ی از سطح ِ باردار که نزدیک ِ $\boldsymbol{r}$ است را با یک نیمصفحه تقریب کرد. از این که واگرایی یِ $\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}$ لگاریتمی ست، نتیجه میشود انتگرال ِ طرف ِ راست ِ (2) وجود دارد. از (11) دیده میشود بخش ِ واگرا-شونده یِ $\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}$ مماس بر $\mathfrak{m}$ است. به علاوه این بخش در انتگرال ِ طرف ِ راست ِ (2) سهم ی ندارد. برا یِ دیدن ِ این، پارامترها یِ $\mathfrak{m}$ را $(\mathfrak{s},\theta)$ میگیرم، که $\mathfrak{s}$ فاصله از مرز ِ $\mathfrak{m}$ است و θ یک متغیر بر خمها یی که فاصله یِ نقاط ِشان از مرز ِ $\mathfrak{m}$ ثابت است. مثل ِ این که θ را یک پارامتر برا یِ مرز ِ $\mathfrak{m}$ بگیرم و تعریف کنم

$$\boldsymbol{r}(\mathfrak{s},\theta)=\boldsymbol{p}(\theta)+\mathfrak{s}\,\boldsymbol{v}(\theta), \tag{12}$$

که $\boldsymbol{p}(\theta)$ نقطه ای در مرز با پارامترِ θ است و $\boldsymbol{v}(\theta)$ بردارِ یکه یِ مماس بر $\mathfrak{m}$ و عمود بر مرزِ $\mathfrak{m}$ به سو یِ درونِ $\mathfrak{m}$ است. البته رُشن است که این پارامترِش فقط برا یِ جاها یِ نزدیکِ مرزِ $\mathfrak{m}$ است. با این پارامترها،

$$\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}\mathfrak{s}\,\mathrm{d}\ell, \tag{13}$$

که ℓ طول بر خمها یِ $\mathfrak{s}$-ثابت است. دیده میشود

$$\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{r}) = \mathfrak{a}\,\boldsymbol{v}\,\ln\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{b}} + O(\mathfrak{s}). \tag{14}$$

$$\oint \mathrm{d}\ell\,\boldsymbol{v} = 0. \tag{15}$$

پس بخشِ واگرا یِ $\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}$ در نیرو (و در نتیجه میدانِ مثر) سهم ندارد. به این ترتیب برا یِ محاسبه یِ نیرو میشود بخشِ واگرا یِ $\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}$ را حذف کرد. بخشِ مماسی یِ آن چه میماند، در $(\mathfrak{m}\to 0)$ همگرا ست و در واقع بخشِ مماسی یِ میدانِ الکتریکی ست. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{F}_{\mathfrak{m}\,\parallel} = \int_{\mathfrak{m}} \mathrm{d}\mu\,\chi(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}_{\parallel}(\boldsymbol{r}) + o(\mathfrak{m}). \tag{16}$$

برا یِ بخشِ عمودی یِ نیرو، توجه میکنم که $\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}\,\perp}$ بر $\mathfrak{m}$ پیوسته است. پس

$$\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}\,\perp}(\boldsymbol{r}+\varepsilon\,\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}\,\perp}(\boldsymbol{r}) = O(\varepsilon), \qquad \boldsymbol{r}\in\mathfrak{m}, \tag{17}$$

که $\boldsymbol{u}$ بردارِ یکه یِ عمود بر $\mathfrak{m}$ است. $\boldsymbol{E}_{\perp}$ بر $\mathfrak{m}$ پیوسته نیست، اما اگر $\boldsymbol{r}$ در $\mathfrak{m}$ باشد، بخشِ زُج-نسبت-به-ε یِ $(\boldsymbol{E}_{\perp}-\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}\,\perp})(\boldsymbol{r}+\varepsilon\,\boldsymbol{u})$ دست-کم مثلِ خُدِ $\mathfrak{m}$ صفر میشود:

$$(\boldsymbol{E}_{\perp}-\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}\,\perp})(\boldsymbol{r}+\varepsilon\,\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{E}_{\perp}-\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}\,\perp})(\boldsymbol{r}-\varepsilon\,\boldsymbol{u}) = O(\mathfrak{m}), \qquad \boldsymbol{r}\in\mathfrak{m}. \tag{18}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}\,\perp}(\boldsymbol{r}) - \frac{\boldsymbol{E}_{\perp}(\boldsymbol{r}+\varepsilon\,\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{E}_{\perp}(\boldsymbol{r}-\varepsilon\,\boldsymbol{u})}{2} = O(\varepsilon) + O(\mathfrak{m}), \quad \boldsymbol{r}\in\mathfrak{m}. \tag{19}$$

پس

$$\boldsymbol{F}_{\mathfrak{m}\,\perp} = \int_{\mathfrak{m}} \mathrm{d}\mu\,\chi(\boldsymbol{r})\,\frac{\boldsymbol{E}_{\perp}(\boldsymbol{r}+\varepsilon\,\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{E}_{\perp}(\boldsymbol{r}-\varepsilon\,\boldsymbol{u})}{2} + O(\varepsilon) + o(\mathfrak{m}). \tag{20}$$

از ترکیبِ این با (16)، و با استفاده از پیوستگی یِ $\boldsymbol{E}_{\parallel}$ بر $\mathfrak{m}$، نتیجه میشود

$$\boldsymbol{F}_{\mathfrak{m}} = \int_{\mathfrak{m}} \mathrm{d}\mu\,\chi(\boldsymbol{r})\,\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\varepsilon\,\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}-\varepsilon\,\boldsymbol{u})}{2} + O(\varepsilon) + o(\mathfrak{m}). \tag{21}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{E}_{\mathfrak{r}}(\boldsymbol{r}_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0+\varepsilon\,\boldsymbol{u})+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0-\varepsilon\,\boldsymbol{u})}{2}. \tag{22}$$

با تعریفها یِ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0\pm\varepsilon\,\boldsymbol{u})=:\boldsymbol{E}^{\pm}(\boldsymbol{r}_0), \tag{23}$$

(با توجه به این که این حدها وجود دارند) (22) چنین میشود.

$$\boldsymbol{E}_{\mathfrak{r}}(\boldsymbol{r}_0)=\frac{\boldsymbol{E}^{+}(\boldsymbol{r}_0)+\boldsymbol{E}^{-}(\boldsymbol{r}_0)}{2}. \tag{24}$$

میدان ِ مئثر میانگین ِ میدان ِ دُ-طرف ِ سطح است (مثلَن [1]).

3 چشمه یِ یک-بُعدی

حالت ی که $\mathfrak{M}$ یک-بُعدی ست، یعنی بار بر یک خم گسترده شده. $\mathfrak{m}$ بخش ی از این خم میشود. در (1) انتگرالده مثل ِ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-2}$ رفتار میکند و عنصر-ِ-طول ِ $\mathrm{d}\mu'$ هم توان ی از $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ ندارد. پس انتگرالده ضرب در عنصر-ِ-طول مثل ِ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-2}\,\mathrm{d}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ رفتار میکند. به این ترتیب $\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}$ نزدیک ِ مرزها یِ $\mathfrak{m}$ واگرا میشود و این واگرایی مثل ِ عکس ِ فاصله از مرزها ست. نتیجه میشود $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{m}}$ هم واگرا میشود.

3.1 میدان در وسط ِ بازه

مختصات را چنان میگیرم که نقطه یِ $\boldsymbol{r}_0$ مبدئ باشد، و در این نقطه مماس بر خم و قائم ِ اصلی یِ خم موازی با محورها یِ به ترتیب x و y باشند، که (x,y,z) مختصات ِ دِکَرتی یَند. به این ترتیب معادله یِ خم در نزدیکی یِ مبدئ چنین میشود

$$\boldsymbol{r}(t)=\hat{\boldsymbol{x}}\,t+\hat{\boldsymbol{y}}\,\frac{t^2}{2\,R}+o(t^2), \tag{25}$$

که R شعاع ِ انحنا یِ خم در مبدئ است. $\mathfrak{m}$ را بخش ی از این خم میگیرم که متناظر با پارامتر در $[-\alpha,\beta]$ است، که α و β مثبت َند. پس

$$\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{r}_0)=K\left(\int^{-\alpha}+\int_{\beta}\right)\mathrm{d}t\,\frac{\chi(t)}{|t|^3}\left[-\hat{\boldsymbol{x}}\,t-\hat{\boldsymbol{y}}\,\frac{t^2}{2\,R}+o(t^2)\right], \tag{26}$$

یا

$$\boldsymbol{E}_{\rm m}(\boldsymbol{r}_0) = K\left(\int^{-\alpha} + \int_{\beta}\right)\mathrm{d}t\bigg[-\hat{\boldsymbol{x}}\,\frac{\chi(0)}{t\,|t|} - \hat{\boldsymbol{x}}\,\frac{(\mathsf{D}\,\chi)(0)}{|t|} - \hat{\boldsymbol{y}}\,\frac{\chi(0)}{2\,R\,|t|} + O(t^0)\bigg]. \tag{27}$$

انتگرال ِ حاصل از جمله یِ اول، مثل ِ α^{-1} و β^{-1} واگرا میشود. اما اگر $\boldsymbol{r}_0$ متناظر با وسط ِ بازه باشد، این جمله واگرا نیست. جملِها یِ دوم و سوم واگرایی یِ لگاریتمی میدهند: جمله یِ دوم موازی با مماس بر خم، و جمله یِ سوم موازی با قائم ِ اصلی ست. البته جمله یِ دوم فقط وقت ی هست که چگالی یِ طولی یِ بار نایکنواخت باشد (مشتق َش صفر نباشد)، و جمله یِ سوم فقط وقت ی هست که شعاع ِ انحنا باپایان باشد (خم خمیده باشد).

3.2 سیم ِ با کلفتی یِ ناصفر

حالا که سیم ِ با کلفتی یِ صفر نیرو-بر-طول ِ (یا میدان- مِئثر ِ) بیپایان میدهد، سیم ی نازک ولی نَ با کلفتی یِ صفر میگیرم، و میکوشم نیرو-بر-طول را برا یِ کلفتیها یِ کم تا حد ِ جمله یِ غالب حساب کنم. یک راه، محاسبه یِ انرژی یِ الکترُستاتیک است. سیم ِ نازک ی را میگیرم که یک استوانه یِ دوار است که خم شده. یعنی یک خم ِ مرکزی (محور) هست، که بر هم نقطه اَش یک قرص به مرکز ِ آن نقطه و عمود بر محور در آن نقطه سوار شده. سیم اجتماع ِ این قرصها ست. به شرط ی که a از شعاع ِ انحنا یِ سیم و طول- ِ-مشخصه یِ تغییرات ِ چگالی-یِ-بار خیل ی کوجکتر باشد، جمله یِ غالب ِ میدان در نزدیک یِ سیم (بیرون ِ آن) مثل میدان ِ یک سیم ِ با کلفتی یِ صفر و چگالی-یِ-بار ِ یکنواخت است. از اینجا U (انرژی یِ پتانسیل ِ الکترُستاتیک) میشود

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{8\,\pi\,K}\int \mathrm{d}V\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E},\\ &= \frac{1}{8\,\pi\,K}(2\,\pi)\int \mathrm{d}\ell[\chi(\ell)]^2\int_a^{\Lambda}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\left(\frac{2\,K}{\rho}\right)^2 + O(a^0), \end{aligned} \tag{28}$$

که ρ فاصله از محور ِ سیم و ℓ طول در راستا ی ِسیم است. λ یک حد- ِ-بالا ی ِفاصله است، که تا آن فاصله تقریب ِ میدان با میدان ِ یک سیم ِ دراز ِ یکنواخت خوب است. به این ترتیب،

$$U = \left(K\,\ln\frac{\Lambda}{a}\right)\int \mathrm{d}\ell\,[\chi(\ell)]^2 + O(a^0). \tag{29}$$

$\boldsymbol{f}$ (چگالی ی ِنیرو) را میشود چنین به دست آورد. یک جابِجایی ی ِمجازی ی ِ$\boldsymbol{\xi}(\ell)$ برا ی ِمحور ِ سیم میگیرم. δU (تغییر ِ انرژی متناظر با این جابِجایی، وقت ی بار ِ هر تکه ثابت میمانَد) را حساب میکنم. این رابطه برقرار است.

$$\delta U = -\int \mathrm{d}\ell\,\boldsymbol{f}(\ell)\cdot\boldsymbol{\xi}(\ell) + o(\boldsymbol{\xi}). \tag{30}$$

تکه ی ِکوچک ی از سیم به طول ِ L، وقت ی سیم جابِجا میشود طول َش تغییر میکند:

$$L + \delta L = \left[\frac{R - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\xi}}{R} + \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\xi})}{\mathrm{d}\ell}\right] L + o(\boldsymbol{\xi}) + o(L), \tag{31}$$

که $\boldsymbol{\tau}$ بردار ِ یکه ی ِمماس است، و $\boldsymbol{n}$ قائم ِ اصلی ست، و R شعاع ِ انحنا ی ِسیم است. به این ترتیب،

$$\frac{\delta L}{L} = -\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\xi}}{R} + \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\xi})}{\mathrm{d}\ell} + o(\boldsymbol{\xi}) + O(L). \tag{32}$$

بار ِ آن تکه از سیم $(\chi\,L)$ است، و طی ِ این جابِجایی ی ِمجازی ثابت میمانَد. پس،

$$\begin{aligned}\delta(\chi^2\,L) &= \delta[(\chi\,L)^2\,(L)^{-1}],\\ &= (\chi\,L)^2\,\delta[(L)^{-1}],\\ &= \chi^2\,L\left[\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\xi}}{R} - \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\xi})}{\mathrm{d}\ell}\right] + o(\boldsymbol{\xi}) + o(L).\end{aligned} \tag{33}$$

تغییر- ِ-انرژی میشود

$$\begin{aligned}\delta U &= \left(K\,\ln\frac{\Lambda}{a}\right)\int \mathrm{d}\ell\,[\chi(\ell)]^2\left[\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\xi}}{R} - \mathsf{D}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\xi})\right](\ell) + o(\boldsymbol{\xi}) + O(a^0),\\ &= \left(K\,\ln\frac{\Lambda}{a}\right)\int \mathrm{d}\ell\,\left\{\chi\left[\left(\frac{\boldsymbol{n}\,\chi}{R} + 2\,\boldsymbol{\tau}\,\mathsf{D}\chi\right)\cdot\boldsymbol{\xi}\right]\right\}(\ell) + o(\boldsymbol{\xi}) + O(a^0).\end{aligned} \tag{34}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{f} = -\chi\left(K\,\ln\frac{\Lambda}{a}\right)\left(\frac{\boldsymbol{n}}{R}\,\chi + 2\,\boldsymbol{\tau}\,\mathsf{D}\chi\right) + O(a^0). \tag{35}$$

پس میدان ِ مئثر میشود

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} = -\left(K\,\ln\frac{\Lambda}{a}\right)\left(\frac{\boldsymbol{n}}{R}\,\chi + 2\,\boldsymbol{\tau}\,\mathsf{D}\chi\right) + O(a^0). \tag{36}$$

دیده میشود این میدان در حد ِ $(a \to 0)$ واگرا ست، چنان که از (27) هم انتظار َش میرفت. و در واقع ساختار ِ واگرایی یَش مشابه ِ هم ان است که در (27) دیده میشود.

4 پانوشتها

[1] David J. Griffiths; “Introduction to electrodynamics” 4th edition (Pearson, 2013) chapter 2