X1-120 (2016/11/27)

تقارنِ گالیله‌ای

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

تقارنِ گالیله‌ای بررسی می‌شود و شرطِ متناظر با این تقارن بر لَگرانژی، و ثابت- ـِحرکتِ متناظر با این تقارن به دست می‌آید. رابطه یِ این تقارن با تقارنِ انتقال بررسی می‌شود و نشان داده می‌شود اگر علاوه بر تبدیلِ گالیله‌ای انتقالِ زمان هم تقارن باشد، انتقالِ مکان هم تقارن است.

1 خیزِ گالیله‌ای

خیزِ گالیله‌ای [1] این است:

$$\boldsymbol{r}'_a = \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{U}\,t, \tag{1}$$

که t زمان است، $\boldsymbol{r}_a$ مکانِ جسمِ a است و $\boldsymbol{r}'_a$ تبدیل-یافته یِ آن است، و $\boldsymbol{U}$ پارامترِ تبدیل (سرعتِ خیز) است. این تبدیل را می‌شود به این شکل نوشت.

$$q'^{\alpha} = q^{\alpha} + s\,u^{\alpha}\,t, \tag{2}$$

که در آن مئلفه‌ها یِ مکانِ همه یِ ذرات کنارِ هم q را می‌سازند، s پارامترِ تبدیل است، و u^{α} ها ثابت‌ اَند. تبدیلِ (2) در واقع کلی‌تر از تبدیلِ (1) نیست، چون (1) را هم می‌شود با مقیاس-کردنِ

مثلفِها یِ مکانِ ذرات به شکلِ (2) دراورد. البته در (2) فرض نشده مثلفِها یِ مکان دِکَرتی یَند، در حال ی که تبدیلِ گالیلیُ [1] نُعَن برا یِ بردارِ مکان به شکلِ (1) نوشته میشود.

همه یِ u^α ها در (2) صفر نیستند، و گر نَ تبدیل همانی میشد. بدونِ کاستن از کلیت میشود فرض کرد u^n ناصفر است، که n تعدادِ درجاتِ آزادی ست (بزرگترین مقدارِ ممکن برا یِ شاخصِ α است). تعریف میکنم.

$$\xi^n = \frac{q^n}{u^n}. \tag{3}$$

$$\xi^i = q^i - u^i\,\xi^n, \quad i < n. \tag{4}$$

ξ^n را با Ξ نشان میدهم و از این پس قرارداد میکنم شاخصها یِ لاتین از 1 تا $(n-1)$ میروند و شاخصها یِ یونانی از 1 تا n میروند. به این ترتیب (2) چنین میشود

$$\Xi' = \Xi + s\,t. \tag{5}$$

$$\xi'^i = \xi^i. \tag{6}$$

2 تقارنِ کنش تحتِ خیزِ گالیلیُ

سرعتِ ξ^α را با v^α و سرعتِ Ξ را با V نشان میدهم:

$$v^\alpha = \dot{\xi}^\alpha. \tag{7}$$

$$\begin{aligned} V &= v^n, \\ &= \dot{\Xi}. \end{aligned} \tag{8}$$

برا یِ تابعها یِ زمان، مکان، و سرعت، مشتقها یِ سویی یِ $\mathfrak{c}$ و $\mathfrak{d}_\alpha$ و $\mathfrak{e}_\alpha$ را چنین تعریف میکنم.

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{c} & \mathfrak{d}_\alpha & \mathfrak{e}_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \xi^\beta \\ v^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\alpha^\beta \end{pmatrix}. \tag{9}$$

$\mathfrak{d}_n$ و $\mathfrak{e}_n$ را با، به ترتیب، $\mathfrak{D}$ و $\mathfrak{E}$ نشان میدهم. تقارن ِ کنش تحت ِ خیز ِ گالیلیِ [1] این میشود که L (لگرانژی) تحت ِ این تبدیل با یک مشتق ِ کامل ِ زمانی تغییر کند:

$$L(t, \xi', v') = L(t, \xi, v) + s\, \mathfrak{h}\, \Lambda + o(s), \tag{10}$$

که Λ تابع ی از فقط زمان و مکان است، و

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{c} + v^\alpha\, \mathfrak{d}_\alpha. \tag{11}$$

دیده میشود اثر ِ $\mathfrak{h}$ بر کمیتها یی که تابع ِ فقط زمان و مکان َند، مشتقگیری یِ کامل ِ زمانی ست.

به این ترتیب تقارن ِ کنش تحت ِ خیز ِ گالیلیِ [1] همئرز است با

$$(t\, \mathfrak{D} + \mathfrak{E}) L = \mathfrak{h}\, \Lambda. \tag{12}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} [t\, \mathfrak{D} + \mathfrak{E}, \mathfrak{h}] &= [t\, \mathfrak{D} + \mathfrak{E}, \mathfrak{c} + v^\alpha\, \mathfrak{d}_\alpha], \\ &= [t, \mathfrak{c}]\, \mathfrak{D} + [\mathfrak{E}, v^\alpha]\, \mathfrak{d}_\alpha, \\ &= -\mathfrak{D} + \delta^\alpha_n\, \mathfrak{d}_\alpha, \end{aligned} \tag{13}$$

که نشان میدهد

$$[t\, \mathfrak{D} + \mathfrak{E}, \mathfrak{h}] = 0. \tag{14}$$

A را تابع ی از فقط زمان و مکان میگیرم که

$$\Lambda = t\, \mathfrak{D}\, A. \tag{15}$$

چون A تابع ِ فقط زمان و مکان است، رابطه یِ بالا میشود

$$\Lambda = (t\, \mathfrak{D} + \mathfrak{E}) A. \tag{16}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} (t\, \mathfrak{D} + \mathfrak{E}) L &= \mathfrak{h} (t\, \mathfrak{D} + \mathfrak{E}) A, \\ &= (t\, \mathfrak{D} + \mathfrak{E}) \mathfrak{h}\, A, \end{aligned} \tag{17}$$

که نشان میدهد

$$(t\, \mathfrak{D} + \mathfrak{E})(L - \mathfrak{h}\, A) = 0. \tag{18}$$

این یک معادله یِ دیفرانسیل برا یِ $(L - \mathfrak{h}\, A)$ است. با تعریفِ

$$\underline{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{X}^1, \dots, \mathfrak{X}^{n-1}), \tag{19}$$

جوابِ معادله یِ (18) میشود

$$L = \tilde{L} + \mathfrak{h}\, A, \tag{20}$$

که

$$\tilde{L}(t, \xi, v) = B(t, \underline{\xi}, \underline{v}, \Xi - t\, V), \tag{21}$$

که B دلبخاه است. پس،

$$L(t, \xi, v) = B(t, \underline{\xi}, \underline{v}, \Xi - t\, V) + (\mathfrak{h}\, A)(t, \xi, v). \tag{22}$$

$(\mathfrak{h}\, A)$ یک مشتقِ کاملِ زمانی ست، که افزودنِ آن به لَگرانژی دینامیک را تغییر نمیدهد. به این ترتیب تقارنِ کنش تحتِ خیزِ گالیلئی [1] همٔرز است با این که لَگرانژی (صرف- ِ-نظر از یک مشتقِ کاملِ زمانی) بستِگی یَش به Ξ و V از طریقِ فقط $(\Xi - V\, t)$ باشد.

3 کنشها یِ مستقل-از-زمان

تقارنِ کنش تحتِ انتقالِ زمان همٔرز با این است که لَگرانژی بستِگی یِ صریح به زمان نداشته باشد. (البته رُشن است که میشود به چنین-لَگرانژی یی یک مشتقِ کاملِ زمانی افزود بی آن که دینامیک عوض شود. گیرم لَگرانژی یِ L صریحَن به زمان وابسته نیست:

$$\mathfrak{c}\, L = 0, \tag{23}$$

و ضمنَن کنشِ متناظر با آن تحتِ خیزِ گالیلئی [1] متقارن است، یعنی (12) برقرار است. از این که L صریحَن به زمان وابسته نیست، نتیجه میشود طرفِ چپِ (12) یک تابعِ دست- ِ-بالا-خطی از زمان است. پس مشتقِ دومِ آن نسبت به زمان صفر است. به این ترتیب با دُ-بار مشتق-پارئی-نسبت-به-زمان گرفتن از (12) نتیجه میشود

$$0 = (\mathfrak{c} + v^\alpha\, \mathfrak{d}_\alpha)(\mathfrak{c}^2\, \Lambda). \tag{24}$$

v^α ها دلبخاه َند و در مشتقها یِ $(\mathfrak{c}^2\,\Lambda)$ ظاهر نمیشوند. پس (23) نتیجه میدهد

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{c}^2\,\Lambda) = 0. \tag{25}$$

$$\mathfrak{d}_\alpha(\mathfrak{c}^2\,\Lambda) = 0. \tag{26}$$

یعنی همه یِ مشتقها یِ پارِئی یِ $(\mathfrak{c}^2\,\Lambda)$ صفر َند. پس $(\mathfrak{c}^2\,\Lambda)$ یک تابع ِ ثابت است. به این ترتیب،

$$\Lambda = \frac{t^2}{2}\,F + t\,N + M, \tag{27}$$

که M و N تابع ِ فقط مکان َند و F ثابت است. C را تابع ی از فقط مکان میگیرم که

$$N = \mathfrak{D}\,C. \tag{28}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$t\,N = (t\,\mathfrak{D} + \mathfrak{E})C. \tag{29}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}(t\,\mathfrak{D} + \mathfrak{E})L &= t\,F + \mathfrak{h}(t\,\mathfrak{D} + \mathfrak{E})C + \mathfrak{h}\,M,\\ &= (t\,\mathfrak{D} + \mathfrak{E})(F\,\Xi + \mathfrak{h}\,C) + \mathfrak{h}\,M,\end{aligned} \tag{30}$$

که نشان میدهد

$$(t\,\mathfrak{D} + \mathfrak{E})(L - F\,\Xi - \mathfrak{h}\,C) = \mathfrak{h}\,M. \tag{31}$$

جواب ِ این معادله میشود

$$L = L' + F\,\Xi + \mathfrak{h}\,C, \tag{32}$$

که

$$(t\,\mathfrak{D} + \mathfrak{E})L' = \mathfrak{h}\,M. \tag{33}$$

طرفِ راستِ (32) مستقل از زمان است. پس (33) میشود

$$\mathfrak{D}\, L' = 0. \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}\, L' &= \mathfrak{h}\, M,\\ &= v^{\alpha}\, \mathfrak{d}_{\alpha}\, M.\end{aligned} \tag{35}$$

$\mathfrak{D}$ را بر (35) اثر میدهم. با استفاده از (34) نتیجه میشود

$$v^{\alpha}\, \mathfrak{d}_{\alpha}(\mathfrak{D}\, M) = 0, \tag{36}$$

که نشان میدهد $(\mathfrak{D}\, M)$ ثابت است. این مقدارِ ثابت را با m نشان میدهم. نتیجه میشود

$$M(\xi) = m\, \Xi + G(\underline{\xi}), \tag{37}$$

که G دلبخاه است. این را در (35) میگذارم. نتیجه میشود

$$L'(\xi, v) = \frac{m}{2}\, V^2 + V\, (\mathfrak{h}\, G)(\underline{\xi}, \underline{v}) + K(\underline{\xi}, \underline{v}), \tag{38}$$

که K دلبخاه است. به این ترتیب،

$$L(\xi, v) = \frac{m}{2}\, V^2 + V\, (\mathfrak{h}\, G)(\underline{\xi}, \underline{v}) + F\, \Xi + K(\underline{\xi}, \underline{v}) + (\mathfrak{h}\, C)(\xi, v). \tag{39}$$

و البته

$$\Lambda(t, \xi) = m\, \Xi + G(\underline{\xi}) + \frac{F}{2}\, t^2 + t(\mathfrak{D}\, C)(\xi). \tag{40}$$

(39) و (40) را میشود به شکلِ (22) و (15) نوشت. با تعریفِ

$$Q(t, \underline{\xi}) = \frac{G(t, \underline{\xi})}{t}, \tag{41}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}B(t, \underline{\xi}, \underline{v}, \Xi - V\, t) &= \frac{m}{2\, t^2}(\Xi - V\, t)^2 + \left[\frac{F}{2} - (\mathfrak{h}\, Q)(t, \underline{\xi}, \underline{v})\right](\Xi - V\, t)\\ &\quad + K(\underline{\xi}, \underline{v}).\end{aligned} \tag{42}$$

$$A(t, \xi) = \frac{m}{2\, t}\, \Xi^2 + \left[\frac{F\, t}{2} + Q(t, \underline{\xi})\right]\Xi + C(t, \xi). \tag{43}$$

$$\Lambda(t, \xi) = m\, \Xi + G(\underline{\xi}) + \frac{F}{2}\, t^2 + t(\mathfrak{D}\, C)(\xi, v). \tag{44}$$

4 ثابتِ حرکت

از (15) و (22) نتیجه میشود I (ثابت-ِ-حرکتِ متناظر با تقارنِ گالیلئی[1]) چنین است.

$$I(t,\xi,v) = t\,(\mathfrak{E}\,B)(t,\underline{\xi},\underline{v},\Xi - V\,t),$$
$$= -t^2\,(\mathfrak{D}\,B)(t,\underline{\xi},\underline{v},\Xi - V\,t). \tag{45}$$

وقت ی کنش مستقل-از-زمان است، این ثابت-ِ-حرکت چنین میشود.

$$I(t,\xi,v) = m\,V\,t - m\,\Xi - \frac{F}{2}\,t^2 + t^2\,(\mathfrak{h}\,Q)(t,\underline{\xi},\underline{v}). \tag{46}$$

البته دیده میشود کنشِ مستقل-از-زمان ی که تحتِ خیزِ گالیلئی متقارن باشد، تحتِ انتقال هم متقارن است: از (38) معلوم است که

$$\mathfrak{D}(L - \mathfrak{h}\,C) = \mathfrak{h}\,\Pi, \tag{47}$$

که

$$\Pi(t,\xi) = F\,t. \tag{48}$$

ثابت-ِ-حرکتِ ناشی از این تقارن را با J نشان میدهم:

$$J(t,\xi,v) = m\,V - F\,t + (\mathfrak{h}\,G)(t,\underline{\xi},\underline{v}). \tag{49}$$

5 پانوشتها

[1] Galileo