X1-121 (2017/01/27)

پارادُکس ِ سرعت ِ سُق در ماده

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

در یک رهیافت ِ ساده-شده به مدل ِ حرکت ِ ذرات در ماده تحت ِ یک نیرو یِ بیرونی، سرعت ِ سُق نصف ِ شتاب ِ حاصل از نیرو یِ بیرونی ضرب در میانگین ِ زمان ِ پویش ِ آزاد به دست میئاید. تحلیل ِ دقیقتر ِ مسئله نشان میدهد سرعت ِ سُق برابر با شتاب ِ حاصل از نیرو یِ بیرونی ضرب در میانگین ِ زمان ِ پویش ِ آزاد است، بدون ِ آن ضریب ِ یک-دوم. این تحلیل ِ دقیقتر به دُ روش ارائه میشود.

1 مدل ِ دْروده

مدل ِ دْروده [1] برا یِ حرکت ِ ذرات در ماده تحت ِ یک نیرو یِ بیرونی این است.

a هر ذره برا یِ مدت ی تصادفی (زمان ِ پویش ِ آزاد) تحت ِ اثر ِ فقط نیرو یِ بیرونی ست، بعد برخُرد میکند و سرعت َش طی ِ زمان ی کوتاه (آرمانی صفر) تغییر میکند، باز تحت ِ اثر ِ فقط نیرو یِ بیرونی قرار میگیرد، و به هم ین ترتیب.

b سرعتها یِ بلافاصله پس از هر برخُرد هم تصادفی یَند.

c سیستم حافظه ندارد: همه یِ این زمانها یِ پویش- ِ-آزاد و سرعتها یِ پس-از-برخُرد (برا یِ همه یِ برخُردها و ذرات) مستقل از هم َند.

d میانگین ِ سرعتها یِ پس-از-برخُرد صفر است.

e میانگین ِ زمان ِ پویش- ِ-آزاد τ است.

اثر ِ ماده در τ ظاهر میشود. البته در شکلها یِ اصلاح-شده یِ این مدل، ماده در تعیین ِ جرم ِ (مئثر ِ) ذره و پارامترها یِ برهمکنش ِ ذره با بیرون هم وارد میشود.

بر اساس ِ این مدل $\boldsymbol{v}(t)$ (سرعت ِ ذره در زمان ِ t پس از آخرین برخُرد) چنین میشود.

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\, t, \tag{1}$$

که $\boldsymbol{v}_0$ سرعت ِ ذره پس از آخرین برخرد است و $\boldsymbol{a}$ شتاب ِ ذره به خاطر ِ نیرو یِ بیرونی ست. فرض شده مقیاس ِ زمانی یِ تغییرات ِ این شتاب خیل ی بزرگتر از زمان ِ نُعی یِ پویش ِ آزاد است، چنان که طی ِ پویش ِ آزاد میشود شتاب را ثابت گرفت. این شتاب میشود

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}, \tag{2}$$

که $\boldsymbol{F}$ نیرو یِ بیرونی و m جرم ِ (مئثر ِ) ذره است. به این ترتیب $\mathsf{tex}_T(\boldsymbol{v})$ (میانگین ِ زمانی یِ سرعت طی ِ زمان ِ T (زمان ِ پویش ِ آزاد)) چنین میشود

$$\mathsf{tex}_T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}_0 + \frac{\boldsymbol{a}\, T}{2}. \tag{3}$$

$\boldsymbol{v}_0$ و T در این رابطه تصادفی یَند.

سرعت ِ سُق را میانگین ِ زمانی یِ سرعت تعریف میکنم و آن را با $\boldsymbol{v}_\mathrm{D}$ نشان میدهم.

2 رهیافت ِ ساده-شده برا یِ محاسبه یِ سرعت ِ سُق

یک ذره یِ خاص را در نظر میگیرم. از رابطه یِ (3) بر بازِها یِ پویش- ِ-آزاد میانگین میگیرم. این یعنی (3) را برا یِ بازه-یِ-پویش- ِ-آزاد ِ j مینویسم:

$$\mathsf{tex}_{T_j}(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}_0)_j + \frac{\boldsymbol{a}\, T_j}{2}. \tag{4}$$

بعد بر بازه (j) میانگین میگیرم. میانگین-گیری بر بازه را با ex نشان میدهم:

$$\mathsf{ex}[\mathsf{tex}_T(\boldsymbol{v})] = \mathsf{ex}(\boldsymbol{v}_0) + \frac{\boldsymbol{a}}{2}\,\mathsf{ex}(T). \tag{5}$$

از **d** و **e**، به ترتیب، نتیجه میشود

$$\mathsf{ex}(\boldsymbol{v}_0) = 0. \tag{6}$$

$$\mathsf{ex}(T) = \tau. \tag{7}$$

به این ترتیب (5) میشود

$$\mathsf{ex}[\mathsf{tex}_T(\boldsymbol{v})] = \frac{\boldsymbol{a}\,\tau}{2}. \tag{8}$$

رهیافت ِ ساده-شده این است که طرف ِ چپ هم ان سرعت ِ سُق است. پس،

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} = \frac{\boldsymbol{a}\,\tau}{2}. \tag{9}$$

این هم ان نتیجه یِ غلط- ِ-مشهور است.

3 تحلیل ِ دقیقتر

اشکال ِ کار ِ بالا این است که میانگین طرف ِ چپ ِ (3) بر بازه میانگین ِ زمانی یِ سرعت نیست. میانگین ِ زمانی یِ سرعت برابر است با جابِجایی یِ کل تقسیم بر زمان ِ کل. جابِجایی طی ِ یک پویش ِ آزاد برابر است با میانگین ِ زمانی یِ سرعت در آن بازه، ضرب در زمان ِ پویش ِ آزاد:

$$\boldsymbol{\Delta}_T = T\,\mathsf{tex}_T(\boldsymbol{v}), \tag{10}$$

که $\boldsymbol{\Delta}_T$ جابِجایی طی ِ T (زمان ِ پویش- ِ-آزاد) است. به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} &= \left(\sum_j T_j\right)^{-1}\left(\sum_j \boldsymbol{\Delta}_{T_j}\right), \\ &= [\mathsf{ex}(T)]^{-1}[\mathsf{ex}(\boldsymbol{\Delta}_T)]. \end{aligned} \tag{11}$$

از (3) و (10) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\Delta}_T = \boldsymbol{v}_0\,T + \frac{\boldsymbol{a}\,T^2}{2}. \tag{12}$$

به این ترتیب (11) میشود

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} = [\mathsf{ex}(T)]^{-1}\left[\mathsf{ex}(\boldsymbol{v}_0\,T) + \frac{\boldsymbol{a}}{2}\,\mathsf{ex}(T^2)\right]. \tag{13}$$

از **c** نتیجه میشود

$$\mathsf{ex}(\boldsymbol{v}_0\,T) = \mathsf{ex}(\boldsymbol{v}_0)\,\mathsf{ex}(T). \tag{14}$$

به این ترتیب (13) میشود

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} = \mathsf{ex}(\boldsymbol{v}_0) + \frac{\boldsymbol{a}}{2}\,\frac{\mathsf{ex}(T^2)}{\mathsf{ex}(T)}. \tag{15}$$

تفاوت ِ طرف ِ راست ِ این رابطه با طرف ِ راست ِ رابطه یِ (5) در جمله یِ آخر است: $\mathsf{ex}(T)$ در (5)، با $[\mathsf{ex}(T)]^{-1}[\mathsf{ex}(T^2)]$ در (15) جایگزین شده.

برا یِ محاسبه یِ میانگین ِ یک تابع ِ T، چگالی یِ احتمال برا یِ T را حساب میکنم. $\rho(T = t)$ (چگالی یِ احتمال برا یِ این که T برابر با t باشد)، از استقلال ِ برخُردها از هم به به دست میئاید. احتمال ِ این که از 0 تا t برخُرد ی نباشد را با $P_0(t)$ نشان میدهم. دیده میشود

$$P_0(t + t') = P_0(t)\,P_{\mathrm{c}}(t + t', t), \tag{16}$$

که $P_{\mathrm{c}}(t_2, t_1)$ احتمال ِ این است که تا t_2 برخُرد ی نباشد، به شرط ِ این که تا t_1 برخُرد ی نبوده باشد. $P_{\mathrm{c}}(t_2, t_1)$ برا یِ $t_2 \geq t_1$ تعریف میشود. استقلال ِ برخُردها از هم نتیجه میدهد

$$P_{\mathrm{c}}(t_2, t_1) = P_0(t_2 - t_1). \tag{17}$$

به این ترتیب،

$$P_0(t + t') = P_0(t)\,P_0(t'), \tag{18}$$

که نشان میدهد P_0 نمایی ست:

$$P_0(t) = \exp(-\alpha\,t). \tag{19}$$

این که $P(t)$ حقیقی و نابزرگتر از 1 است، نتیجه میدهد α حقیقی و نامنفی ست.

دیده میشود

$$\begin{aligned} s\,\rho(T = t) &= P_0(t)\,[1 - P_{\mathrm{c}}(t + s, t)] + o(s),\\ &= P_0(t)\,[1 - P_0(s)] + o(s),\\ &= s\,\alpha\,P_0(t) + o(s), \end{aligned} \tag{20}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\rho(T=t) &= \alpha\, P_0(t),\\ &= \alpha\, \exp(-\alpha\, t).\end{aligned} \tag{21}$$

α چنین به دست میئاید.

$$\begin{aligned}\tau &= \mathsf{ex}(T),\\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}\,t\,\rho(T=t)\,t,\\ &= \frac{1}{\alpha}.\end{aligned} \tag{22}$$

به این ترتیب،

$$\rho(T=t) = \frac{1}{\tau}\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \tag{23}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned}\mathsf{ex}(T^2) &= \int_0^\infty \mathrm{d}\,t\,\rho(T=t)\,t^2,\\ &= 2\,\tau^2,\end{aligned} \tag{24}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{ex}(T^2)}{\mathsf{ex}(T)} &= 2\,\tau,\\ &= 2\,\mathsf{ex}(T).\end{aligned} \tag{25}$$

این و (6) را در (15) میگذارم. نتیجه میشود

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} = \boldsymbol{a}\,\tau. \tag{26}$$

این نتیجه درست است و ضریب ِ نادرست ِ یک-دوم در (9) را ندارد.

4 یک راه ِ دیگر

(26) را میشود با یک راه ِ مفصلتر هم به دست آورد. در کل ِ این بخش میانگین-گیری یِ مجموعِئی فرض میشود.

حرکت ِ یک ذره از زمان ِ 0 تا زمان ِ t را در نظر میگیرم. احتمال ِ این که این ذره طی ِ این مدت n برخُرد داشته باشد را با $P_n(t)$ نشان میدهم. میانگین ِ زمانی یِ سرعت ِ این ذره به شرط ِ n برخُرد را با $\boldsymbol{u}_n(t)$ نشان میدهم. به این ترتیب $\boldsymbol{u}(t)$ (میانگین ِ زمانی یِ سرعت طی ِ این مدت) چنین میشود.

$$\boldsymbol{u}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)\,\boldsymbol{u}_n(t). \tag{27}$$

برا یِ $\boldsymbol{u}_n$ یک رابطه یِ بازگشتی به دست میاورم. احتمال ِ این که طی ِ مدت ِ کوچک ِ s یک برخُرد رُخ دهد $[\alpha\,s+o(s)]$ است. حالت ی را در نظر میگیرم که تعداد ِ برخُردها در بازِها یِ $[0,t']$ و $[t',t'+s]$ و $[t'+s,t]$ ، به ترتیب، صفر و یک و $(n-1)$ باشد. $\mathfrak{P}_n(t,t')$ (احتمال ِ این حالت تقسیم بر s، در $s\to 0$) چنین است.

$$\mathfrak{P}_n(t,t')=\alpha\,P_0(t')\,P_{n-1}(t-t'). \tag{28}$$

$\mathfrak{R}_n(t,t')$ (جابِجایی یِ ذره از 0 تا t در این حالت، و در $s\to 0$) چنین میشود.

$$\mathfrak{R}_n(t,t')=t'\,\boldsymbol{u}_0(t')+(t-t')\,\boldsymbol{u}_{n-1}(t-t'). \tag{29}$$

میانگین ِ جابِجایی از 0 تا t به شرط ِ n برخُرد را با $\mathfrak{R}_n(t)$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\boldsymbol{u}_n(t)=\frac{\mathfrak{R}_n(t)}{t}. \tag{30}$$

$$\mathfrak{R}_n(t)=\left[\int_0^t \mathrm{d}\,t'\,\mathfrak{P}_n(t,t')\right]^{-1}\int_0^t \mathrm{d}\,t'\,\mathfrak{P}_n(t,t')\,\mathfrak{R}_n(t,t'). \tag{31}$$

(28) و (29) را در اینها میگذارم:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_n(t)=&\left[t\int_0^t \mathrm{d}\,t'\,P_0(t')\,P_{n-1}(t-t')\right]^{-1}\\&\int_0^t \mathrm{d}\,t'\,P_0(t')\,P_{n-1}(t-t')[t'\,\boldsymbol{u}_0(t')+(t-t')\,\boldsymbol{u}_{n-1}(t-t')].\end{aligned} \tag{32}$$

دیده میشود

$$P_n(t)=\int_0^t \mathrm{d}\,t'\,\mathfrak{R}_n(t,t'). \tag{33}$$

به این ترتیب از (28) نتیجه میشود

$$P_n(t) = \alpha \int_0^t \mathrm{d}\,t'\, P_0(t')\, P_{n-1}(t-t'). \qquad (34)$$

این یک رابطه یِ بازگشتی برا یِ P_n است، که همراه با (19) به رابطه ای برا یِ P_n مینجامد. یک راه برا یِ حل ِ این رابطه یِ بازگشتی استفاده از تبدیل ِ لَپلَس [2] است. تعریف میکنم

$$\mathcal{P}_n(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}\,t\, \exp(-z\,t)\, P_n(t). \qquad (35)$$

از این و (34) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n(z) &= \alpha \int_0^\infty \mathrm{d}\,t\, \exp(-z\,t) \int_0^t \mathrm{d}\,t'\, P_0(t')\, P_{n-1}(t-t'),\\ &= \alpha \int_0^\infty \mathrm{d}\,t'\, \exp(-z\,t')\, P_0(t') \int_0^\infty \mathrm{d}\,t''\, \exp(-z\,t'')\, P_{n-1}(t''), \qquad (36)\end{aligned}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathcal{P}_n(z) = \alpha\, \mathcal{P}_0(z)\, \mathcal{P}_{n-1}(z), \qquad (37)$$

و از آنجا،

$$\mathcal{P}_n(z) = \alpha^n\, [\mathcal{P}_0(z)]^{n+1}. \qquad (38)$$

از (19) نتیجه میشود

$$\mathcal{P}_0(z) = \frac{1}{\alpha + z}. \qquad (39)$$

به این ترتیب،

$$\mathcal{P}_n(z) = \frac{\alpha^n}{(\alpha + z)^{n+1}}. \qquad (40)$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n(z) &= \frac{1}{n!}\left(-\alpha\,\frac{\partial}{\partial\, z}\right)^n \frac{1}{\alpha + z},\\ &= \frac{1}{n!}\left(-\alpha\,\frac{\partial}{\partial\, z}\right)^n \int_0^\infty \mathrm{d}\,t\, \exp(-z\,t)\, \exp(-\alpha\,t),\\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}\,t\, \exp(-z\,t)\, \frac{(\alpha\,t)^n}{n!}\, \exp(-\alpha\,t), \qquad (41)\end{aligned}$$

که نتیجه میدهد

$$P_n(t) = \frac{(\alpha\, t)^n}{n!}\, \exp(-\alpha\, t). \tag{42}$$

این هم ان تُزیع ِ پُوَسُن [3] است.

(42) را در (32) میگذارم:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_n(t) &= \left[t \int_0^t \mathrm{d}\,t'\,(t-t')^{n-1}\right]^{-1}\\ &\quad \int_0^t \mathrm{d}\,t'\,(t-t')^{n-1}[t'\,\boldsymbol{u}_0(t') + (t-t')\boldsymbol{u}_{n-1}(t-t')],\\ &= \frac{n}{t^{n+1}} \int_0^t \mathrm{d}\,t'\,(t-t')^{n-1}[t'\,\boldsymbol{u}_0(t') + (t-t')\boldsymbol{u}_{n-1}(t-t')].\end{aligned} \tag{43}$$

$\boldsymbol{u}_n$ با این رابطه یِ بازگشتی و با دانستن ِ $\boldsymbol{u}_0$ به دست میئاید. به سادِگی دیده میشود

$$\boldsymbol{u}_0(t) = \frac{\boldsymbol{a}\,t}{2}. \tag{44}$$

از این و (43) نتیجه میشود به ازا یِ همه یِ n ها بردار ِ $\boldsymbol{u}_n$ با $\boldsymbol{a}$ موازی ست. w_n را چنین تعریف میکنم.

$$\boldsymbol{u}_n(t) = \boldsymbol{a}\,t\,w_n(t). \tag{45}$$

این را در (43) میگذارم:

$$w_n(t) = \frac{n}{t^{n+2}} \int_0^t \mathrm{d}\,t'\,(t-t')^{n-1}[t'^2\,w_0(t') + (t-t')^2\,w_{n-1}(t-t')]. \tag{46}$$

از (44) دیده میشود

$$w_0(t) = \frac{1}{2}. \tag{47}$$

این، از جمله، یعنی $w_0(t)$ مستقل از t است. با استفاده از (46) و این که $w_0(t)$ مستقل از t است، با یک استقرا یِ ساده معلوم میشود $w_n(t)$ به ازا یِ همه یِ n ها مستقل از t است. به این ترتیب (46) میشود

$$w_n = \frac{2\,w_0}{(n+2)(n+1)} + \frac{n\,w_{n-1}}{n+2}. \tag{48}$$

x_n را چنین تعریف میکنم.

$$x_n = (n+2)(n+1)w_n. \tag{49}$$

رابطه یِ (48) چنین میشود

$$x_n = x_0 + x_{n-1}, \tag{50}$$

که نتیجه میدهد

$$x_n = (n+1)x_0, \tag{51}$$

و از آنجا،

$$w_n = \frac{2\,w_0}{n+2}, \tag{52}$$

که با استفاده از (47) میشود

$$w_n = \frac{1}{n+2}. \tag{53}$$

(53) را در (45) میگذارم. حاصل را همراه با (42) در (27) میگذارم. نتیجه میشود

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{\boldsymbol{a}}{\alpha}\,\exp(-\alpha\,t)\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\,t)^{n+1}}{(n+2)n!}. \tag{54}$$

تابع ِ f را چنین تعریف میکنم.

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{n+1}}{(n+2)n!}. \tag{55}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\,[y\,f(y)] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{n+1}}{n!},\\ &= y\,\exp(y).\end{aligned} \tag{56}$$

به این ترتیب،

$$y\,f(y) = (y-1)\,\exp(y) + c, \tag{57}$$

که c یک ثابت است. این ثابت از اینجا به دست میئاید که طرف ِ چپ ِ رابطه یِ بالا در $y = 0$ صفر است:

$$c = 1. \tag{58}$$

$$f(y) = \exp(y) - \frac{1}{y}[\exp(y) - 1]. \tag{59}$$

پس،

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{\boldsymbol{a}}{\alpha}\left\{1 - \frac{1}{\alpha\, t}[1 - \exp(-\alpha\, t)]\right\}, \tag{60}$$

که با استفاده از (22) میشود

$$\boldsymbol{u}(t) = (\boldsymbol{a}\,\tau)\left\{1 - \frac{\tau}{t}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\right\}. \tag{61}$$

از جمله نتیجه میشود

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{a}\,\tau. \tag{62}$$

این هم ان (26) است، که رابطه یِ درست است و ضریب ِ نادرست ِ یک-دوم در (9) را ندارد.

5 پانوشتها

[1] Drude

[2] Laplace

[3] Poisson