X1-122 (2017/02/25)

خط- ِ-میدانها یِ بار ی که بر یک خط ِ راست حرکت َمیکند

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

خطوط ِ میدان ِ الکتریکی برا یِ یک بار بررسی میشود، که بر یک خط ِ راست حرکت میکند. این حرکت در حالت ِ کلی نایکنواخت است. به ویژه، حالت ی بررسی میشود که بار از سکون شروع به حرکت میکند، به مدت ی محدود شتاب ی ثابت دارد، و پس از آن با سرعت ِ ثابت به حرکت َش ادامه میدهد.

1 میدان ِ بار ِ متحرک

چنان که در مثلَن [1] آمده، میدانها یِ الکتریکی و مغناطیسی یِ بار ِ q چنین َند.

$$\boldsymbol{E} = \frac{K\,q}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^3}\left\{\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2\,R^2}+\frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{f}]}{R}\right\}. \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}}{c}. \tag{2}$$

K ثابت ِ نیرو یِ الکتریکی، $\boldsymbol{E}$ میدان ِ الکتریکی، و $\boldsymbol{B}$ میدان ِ مغناطیسی ست. این میدانها در $(t, \boldsymbol{r})$ محاسبه شده اند، که t زمان و $\boldsymbol{r}$ مکان است. مکان ِ ذره یِ باردار $\boldsymbol{r}_\mathrm{s}$ است. همچنین،

$$c\,(t - t') = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t')|, \tag{3}$$

که این یک معادله برا یِ t' (زمان ِ گسیل ِ میدان) است،

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t'), \tag{4}$$

$$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t')|, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t')]}{\mathrm{d}\,t'}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}\,t'}, \tag{8}$$

$$\gamma = (1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})^{-1/2}. \tag{9}$$

از این پس حرکت ِ بار را بر یک خط ِ راست میگیرم، که محور ِ z را بر آن خط میگذارم. پس جا یِ ذره با فقط z_s (مختصه یِ z ِ ذره مشخص) میشود. بردار ِ یکه یِ در جهت ِ محور ِ z را با $\boldsymbol{m}$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\beta} = \beta\,\boldsymbol{m}. \tag{10}$$

$$\beta = \frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}[z_\mathrm{s}(t')]}{\mathrm{d}\,t'}. \tag{11}$$

$$\boldsymbol{f} = f\,\boldsymbol{m}. \tag{12}$$

$$f = \frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}\,\beta}{\mathrm{d}\,t'}. \tag{13}$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \tag{14}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{K\,q}{(1 - \beta\,\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})^3}\left\{\frac{\boldsymbol{n} - \beta\,\boldsymbol{m}}{\gamma^2\,R^2} + \frac{f\,\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})}{R}\right\}. \tag{15}$$

تعریف میکنم

$$\zeta = z - z_\mathrm{s}(t'). \tag{16}$$

بر حسب ِ مختصات ِ استوانئی یِ (ρ, φ, z)، و با $\boldsymbol{p}$ (بردار ِ یکه در جهت ِ شعاع ِ استوانِئی)،

$$\boldsymbol{R} = \rho\,\boldsymbol{p} + \zeta\,\boldsymbol{m}. \tag{17}$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}. \tag{18}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\rho\,\boldsymbol{p} + \zeta\,\boldsymbol{m}}{R}. \tag{19}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{K\,q}{(1-\beta\,\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})^3}\left\{\frac{\rho\,\boldsymbol{p} + \zeta\,\boldsymbol{m} - \beta\,R\,\boldsymbol{m}}{\gamma^2\,R^3} + \frac{f[\zeta(\rho\,\boldsymbol{p} + \zeta\,\boldsymbol{m}) - R^2\,\boldsymbol{m}]}{R^3}\right\},\\ &= \frac{K\,q}{(1-\beta\,\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})^3\,R^3}\left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + f\,\zeta\right)\rho\,\boldsymbol{p} + \left(\frac{\zeta - \beta\,R}{\gamma^2} - f\,\rho^2\right)\boldsymbol{m}\right].\end{aligned} \tag{20}$$

2 معادلات ِ خط- ِ-میدانها

خط- ِ-میدان ی را در نظر میگیرم که از مکان ِ بار در زمان ِ t' شروع میشود. در زمان ِ t، این خط- ِ-میدان از نقطه ای با مختصات ِ استوانِئی یِ (ρ, φ, z) میگذرد. دیده میشود

$$\rho^2 + \zeta^2 = c^2\,(t - t')^2. \tag{21}$$

$$R = c(t - t'). \tag{22}$$

از (20) نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,\rho}{\mathrm{d}\,z} = \frac{(\gamma^{-2} + f\,\zeta)\rho}{\gamma^{-2}(\zeta - \beta\,R) - f\,\rho^2}, \tag{23}$$

یا

$$\begin{aligned}\rho\,\mathrm{d}\,\rho &= \frac{(\gamma^{-2} + f\,\zeta)\rho^2}{\gamma^{-2}(\zeta - \beta\,R) - f\,\rho^2}\,\mathrm{d}\,z,\\ &= \frac{(\gamma^{-2} + f\,\zeta)\rho^2}{\gamma^{-2}(\zeta - \beta\,R) - f\,\rho^2}(\mathrm{d}\,\zeta + c\,\beta\,\mathrm{d}\,t').\end{aligned} \tag{24}$$

از (21) و (22) هم، به ترتیب، نتیجه میشود

$$\rho\,\mathrm{d}\,\rho = -\zeta\,\mathrm{d}\,\zeta - c\,R\,\mathrm{d}\,t'. \tag{25}$$

$$\mathrm{d}R = -c\,\mathrm{d}\,t'. \tag{26}$$

(یاداوری: در این محاسبات t ثابت است.) پس،

$$\left[\frac{(\gamma^{-2}+f\,\zeta)\rho^2}{\gamma^{-2}(\zeta-\beta\,R)-f\,\rho^2}+\zeta\right]\mathrm{d}\,\zeta=\left[\frac{(\gamma^{-2}+f\,\zeta)\beta\,\rho^2}{\gamma^{-2}(\zeta-\beta\,R)-f\,\rho^2}+R\right]\mathrm{d}\,R, \tag{27}$$

یا

$$\gamma^{-2}\,R\,\mathrm{d}\,\zeta=[\gamma^{-2}\,\zeta-f\,(R^2-\zeta^2)]\mathrm{d}\,R, \tag{28}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathrm{d}\left(\frac{\zeta}{R}\right)=-\gamma^2\,f\left[1-\left(\frac{\zeta}{R}\right)^2\right]\mathrm{d}\,R. \tag{29}$$

از (13) و (26) هم دیده میشود

$$f=-\frac{\mathrm{d}\,\beta}{\mathrm{d}\,R}. \tag{30}$$

به این ترتیب (29) میشود

$$\frac{\mathrm{d}(\zeta/R)}{1-(\zeta/R)^2}=\frac{\mathrm{d}\,\beta}{1-\beta^2}, \tag{31}$$

که جواب َش میشود

$$\tanh^{-1}\left(\frac{\zeta}{R}\right)=\tanh^{-1}\mu+\tanh^{-1}\beta, \tag{32}$$

که μ یک ثابت است. (32) را میشود چنین نوشت.

$$\frac{\zeta}{R}=\frac{\mu+\beta}{1+\mu\,\beta}. \tag{33}$$

به این ترتیب، با تعریفها یِ

$$T=c\,t, \tag{34}$$

$$Z_{\mathrm{s}}(S)=z_{\mathrm{s}}\left(\frac{S}{c}\right), \tag{35}$$

معادلات ِ پارامتری یِ خط- ِ-میدانها چنین میشوند.

$$z=Z_{\mathrm{s}}(T-R)+R\,\frac{\mu+\beta}{1+\mu\,\beta}. \tag{36}$$

$$\rho=R\sqrt{1-\left(\frac{\mu+\beta}{1+\mu\,\beta}\right)^2}. \tag{37}$$

R پارامتر است و μ خط- ِ-میدان را مشخص میکند. به این ترتیب برا یِ هر خط- ِ-میدان μ ثابت است.

3 مثال

حالت ی را بررسی میکنم که بار ابتدا ساکن است؛ از زمان ِ صفر تا $(c^{-1}\,R_1)$ شتاب ی ثابت دارد و در زمان ِ $(c^{-1}\,R_1)$ سرعت َش $(c\,B)$ میشود؛ از زمان ِ $(c^{-1}\,R_1)$ به بعد هم سرعت َش مقدار ِ ثابت ِ $(c\,B)$ میماند:

$$Z_{\rm s}(S)=\begin{cases}0, & S\le 0\\ \dfrac{B\,S^2}{2\,R_1}, & 0\le S\le R_1\\ B\,\left(S-\dfrac{R_1}{2}\right), & R_1\le S\end{cases}\cdot \tag{38}$$

$$\beta=\begin{cases}0, & T\le R\\ \dfrac{B\,(T-R)}{R_1}, & T-R_1\le R\le T\\ B, & R\le T-R_1\end{cases}\cdot \tag{39}$$

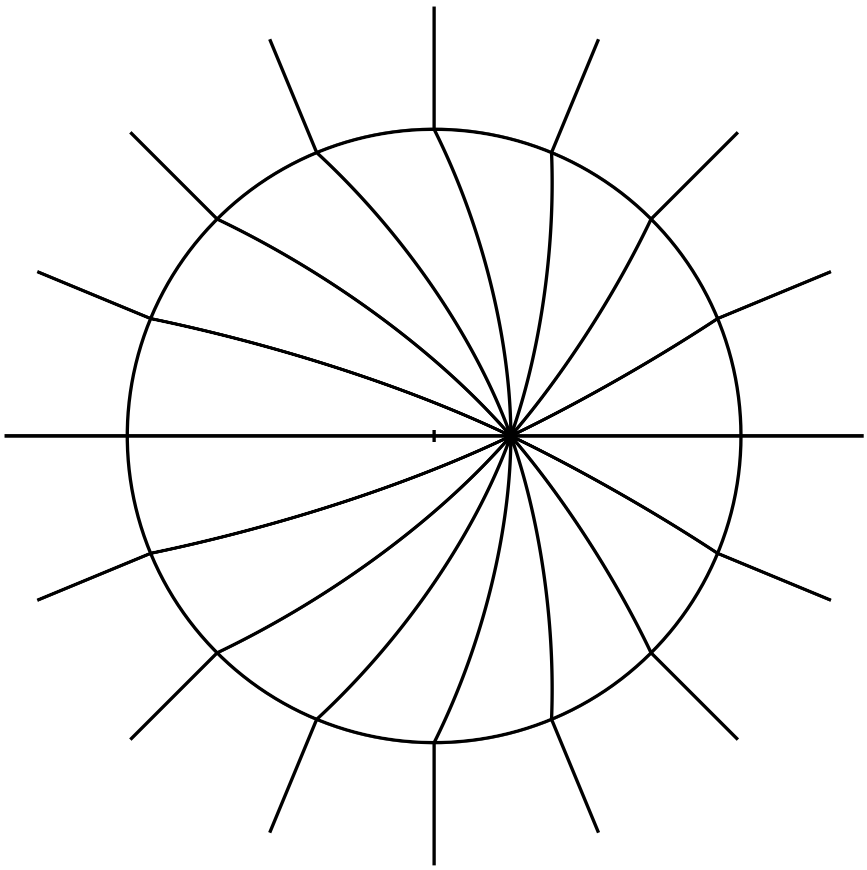
در شکلها بار بر خط ی افقی حرکت میکند. جا یِ بار پیش از شروع ِ حرکت با یک خط ِ عمودی یِ کوتاه مشخص شده.

شکلها یِ 1 تا 3 خط- ِ-میدانها برا یِ زمان ی را نشان میدهند که بار هنوز شتاب ِ ناصفر دارد: یعنی T برابر با R_1 است. درون ِ دایره جاها یی ست که خبر ِ شروع-به-حرکت ِ بار را گرفته اند. بیرون ِ دایره جاها یی ست که خبر ِ شروع-به-حرکت ِ بار را نگرفته اند. بیرون ِ دایره خط- ِ-میدانها راست َند و راستا یِشان از جا یِ بار پیش از شروع به حرکت میگذرد.

شکلها یِ 4 تا 6 خط- ِ-میدانها برا یِ زمان ی را نشان میدهند که بزرگتر از زمان ِ پایان ِ شتاب است: یعنی T بزرگتر از R_1 است. درون ِ دایره یِ کوچکتر جاها یی ست که خبر ِ صفر-شدن ِ شتاب را گرفته اند. بیرون ِ دایره یِ بزرگتر جاها یی ست که خبر ِ شروع-به-حرکت ِ بار را نگرفته اند. درون ِ دایره یِ کوچکتر خط- ِ-میدانها راست َند و از جا یِ بار در آن زمان شروع میشوند. بیرون ِ دایره یِ بزرگتر هم خط- ِ-میدانها راست َند، اما راستا یِشان از جا یِ بار پیش از شروع به حرکت میگذرد. درون ِ دایره یِ کوچکتر خط- ِ-میدانها اطراف ِ صفحه یِ عمود بر راستا یِ حرکت ِ بار جمع شده اند.

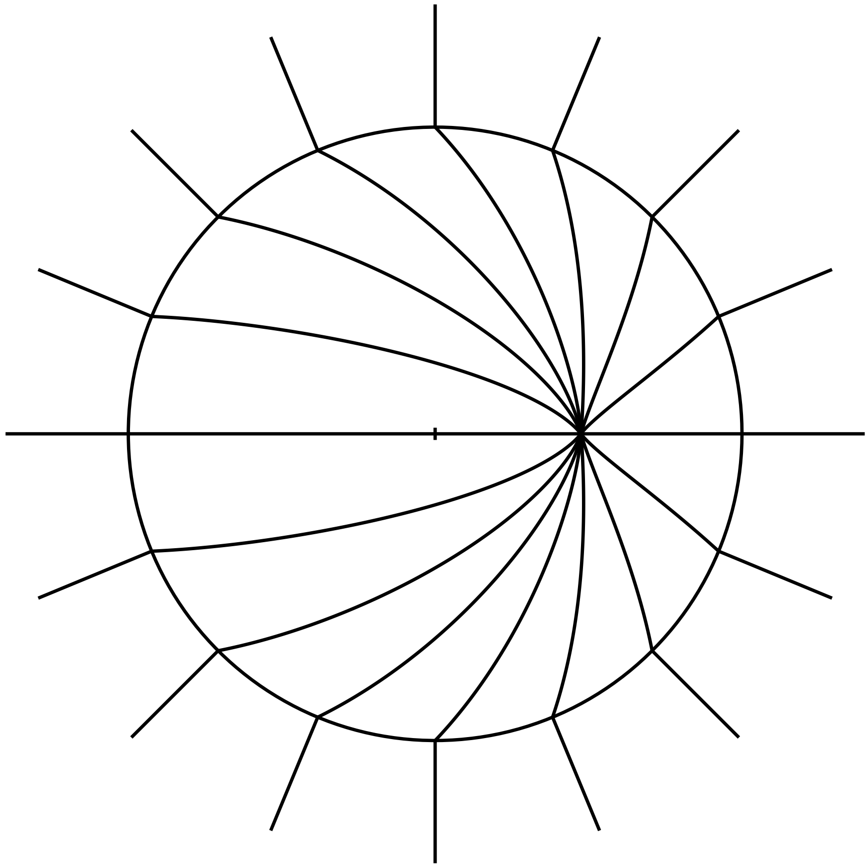
شکلها یِ 7 تا 9 خط- ِ-میدانها برا یِ زمان ی را نشان میدهند که بزرگتر از زمان ِ پایان ِ شتاب

است، در حالت ی که تغییر- ِ-سرعت آنی ست: یعنی T مثبت است و R_1 صفر است. درون ِ دایره جاها یی ست که خبر ِ تغییر- ِ-سرعت ِ بار را گرفته اند. بیرون ِ دایره جاها یی ست که خبر ِ شروع-به-حرکت ِ بار را نگرفته اند. درون ِ دایره خط- ِ-میدانها راست َند و از جا یِ بار در آن زمان شروع میشوند. بیرون ِ دایره هم خط- ِ-میدانها راست َند، اما راستا یِشان از جا یِ بار پیش از شروع به حرکت میگذرد. درون ِ دایره خط- ِ-میدانها اطراف ِ صفحه یِ عمود بر راستا یِ حرکت ِ بار جمع شده اند. خط- ِ-میدانها رو یِ دایره جابِجا میشوند.



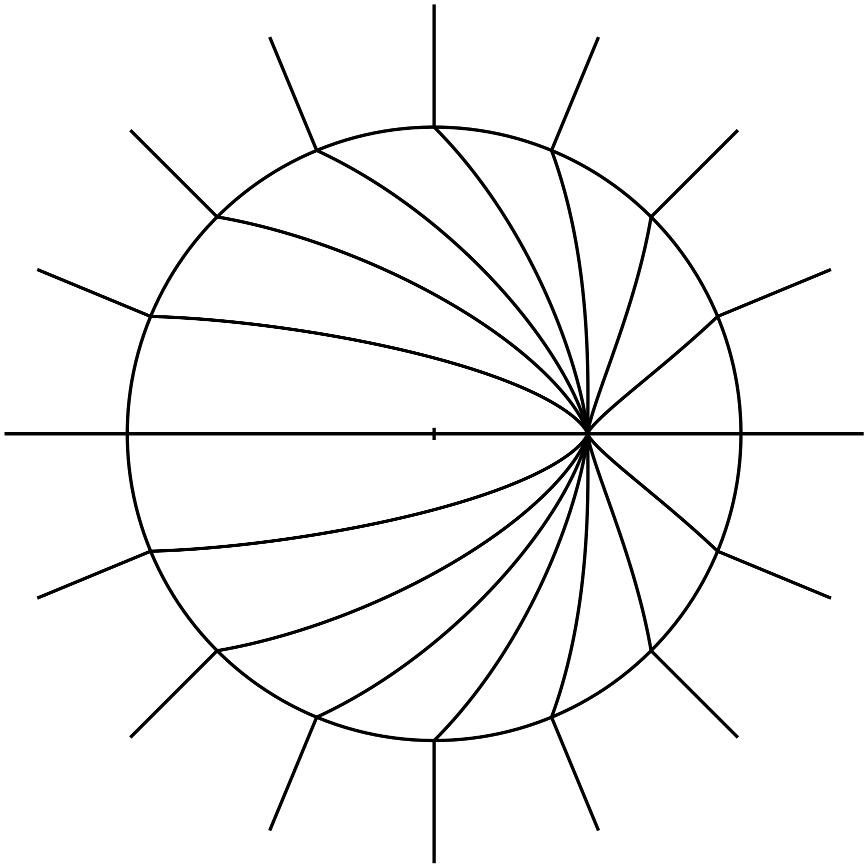
شکل ِ 1: پیش از پایان ِ شتاب

$$B = 0.5, \qquad \frac{R_1}{T} = 1.$$



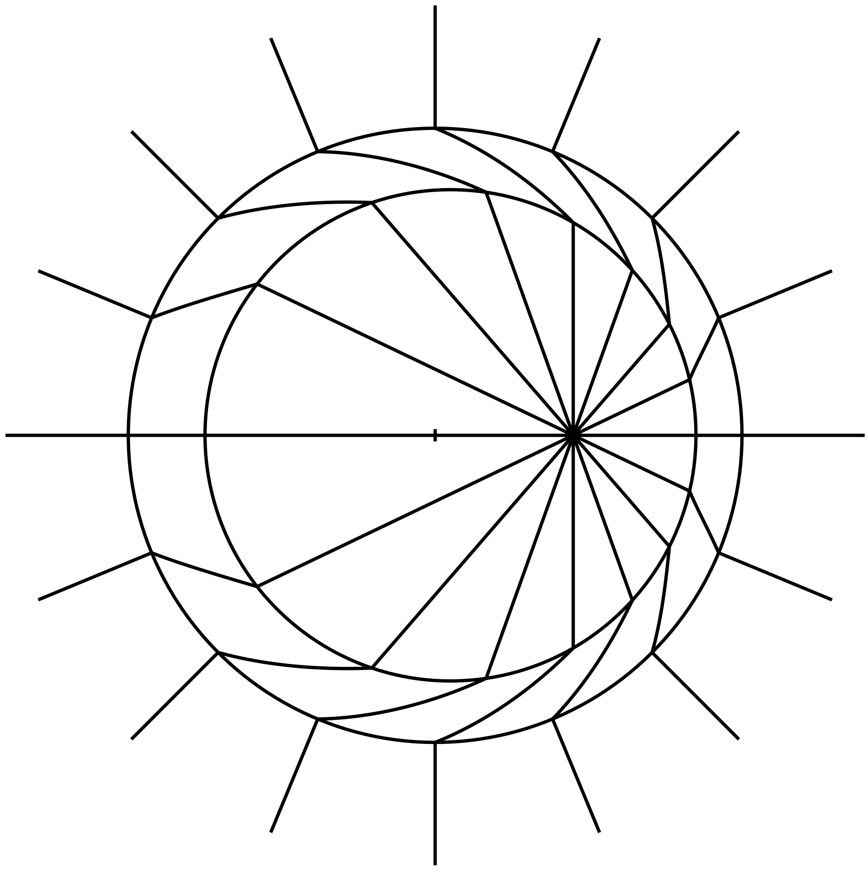
شکل ِ 2: پیش از پایان ِ شتاب

$$B = 0.95, \qquad \frac{R_1}{T} = 1.$$



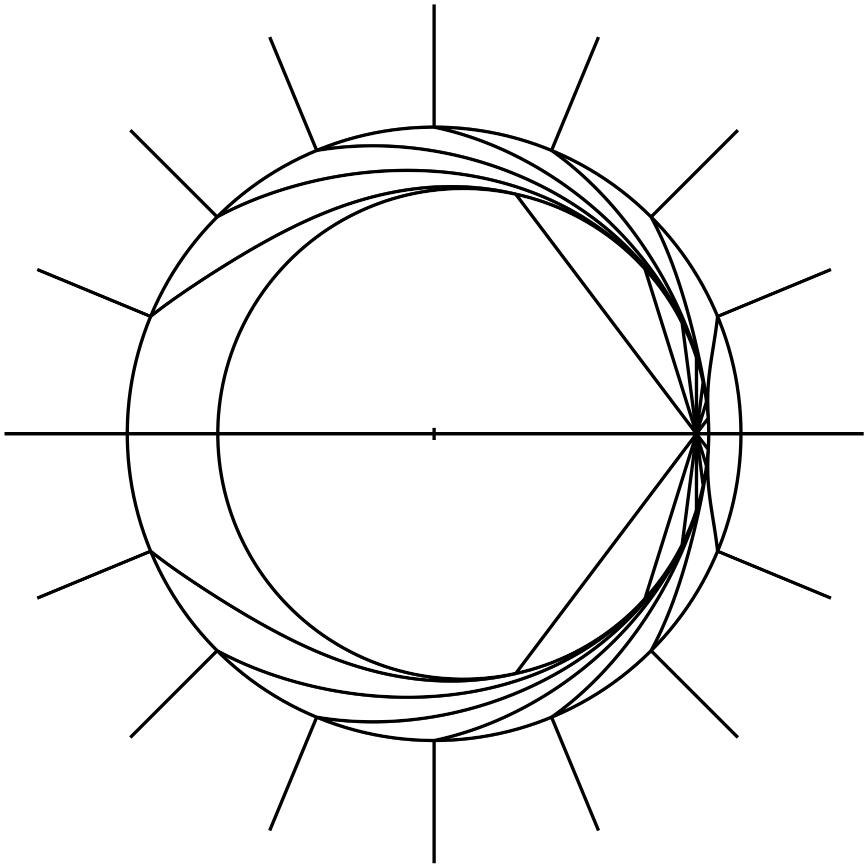
شکل ِ 3: پیش از پایان ِ شتاب

$$B = 1, \qquad \frac{R_1}{T} = 1.$$



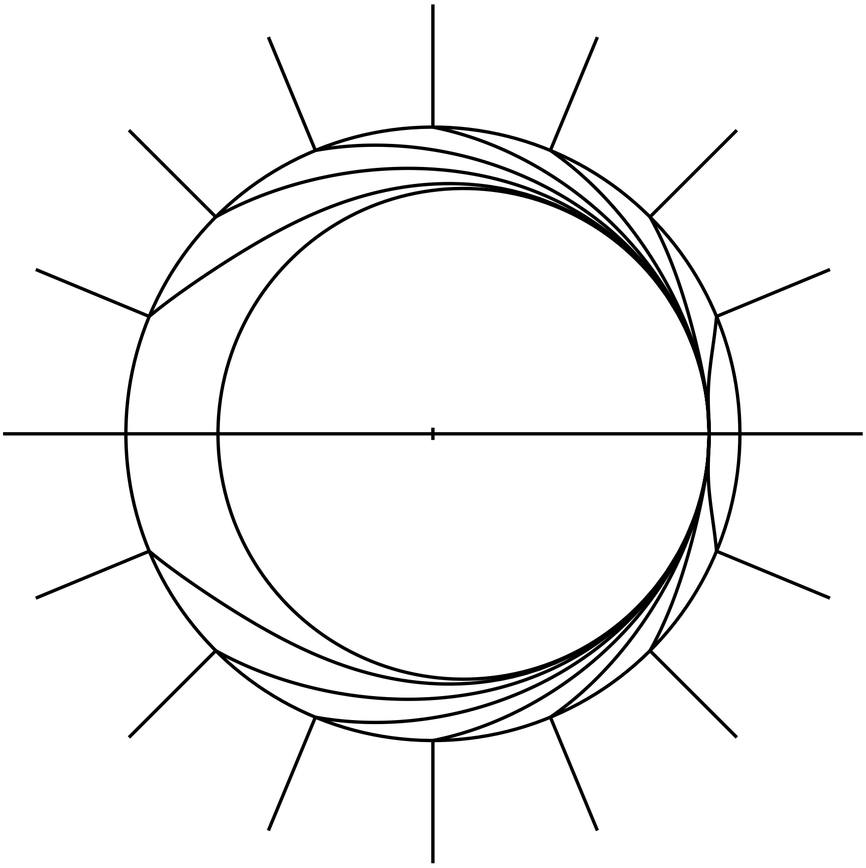
شکلِ 4: پس از پایانِ شتاب

$$B = 0.5, \qquad \frac{R_1}{T} = 0.2.$$



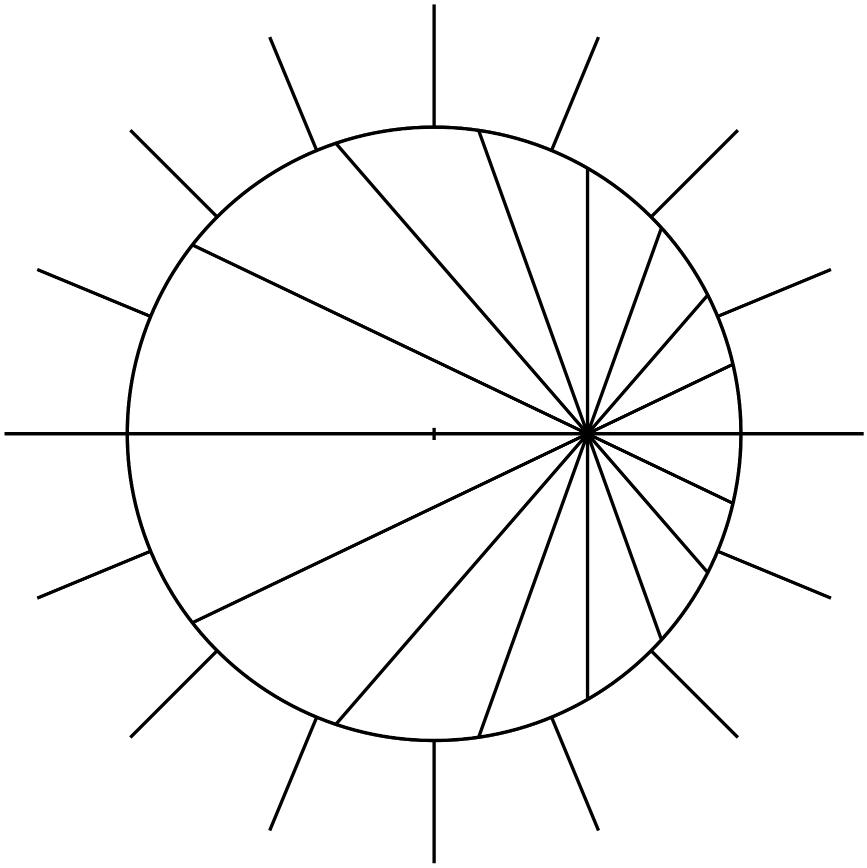
شکل ِ 5: پس از پایان ِ شتاب

$$B = 0.95, \qquad \frac{R_1}{T} = 0.2.$$



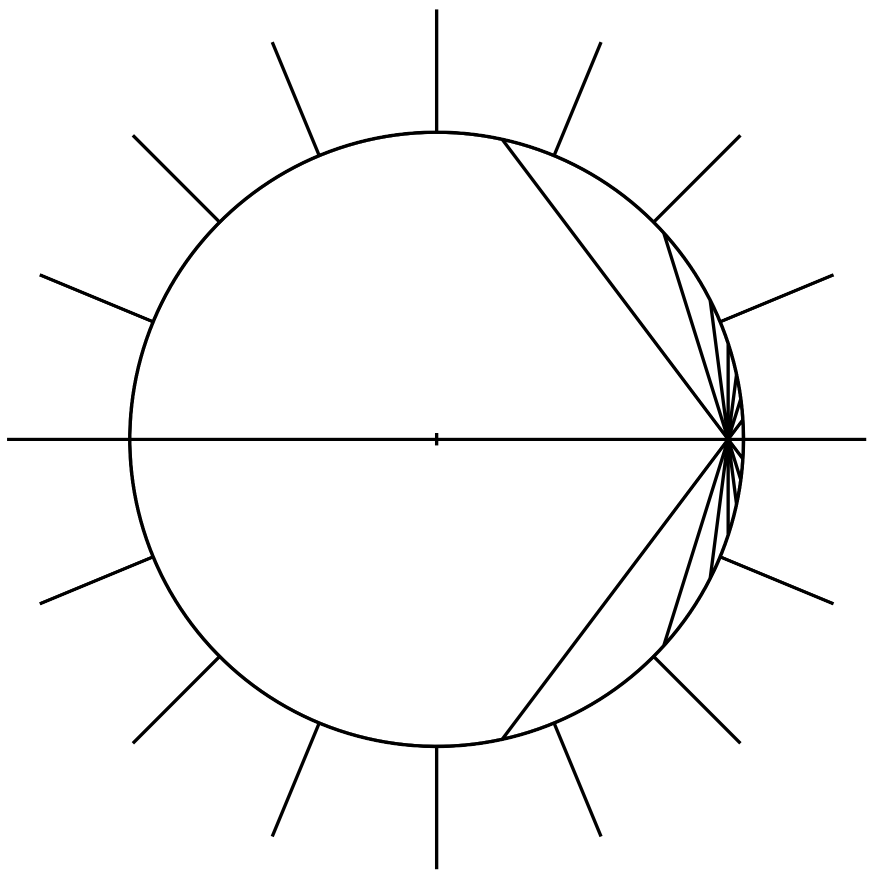
شکلِ 6: پس از پایانِ شتاب

$$B = 1, \qquad \frac{R_1}{T} = 0.2.$$



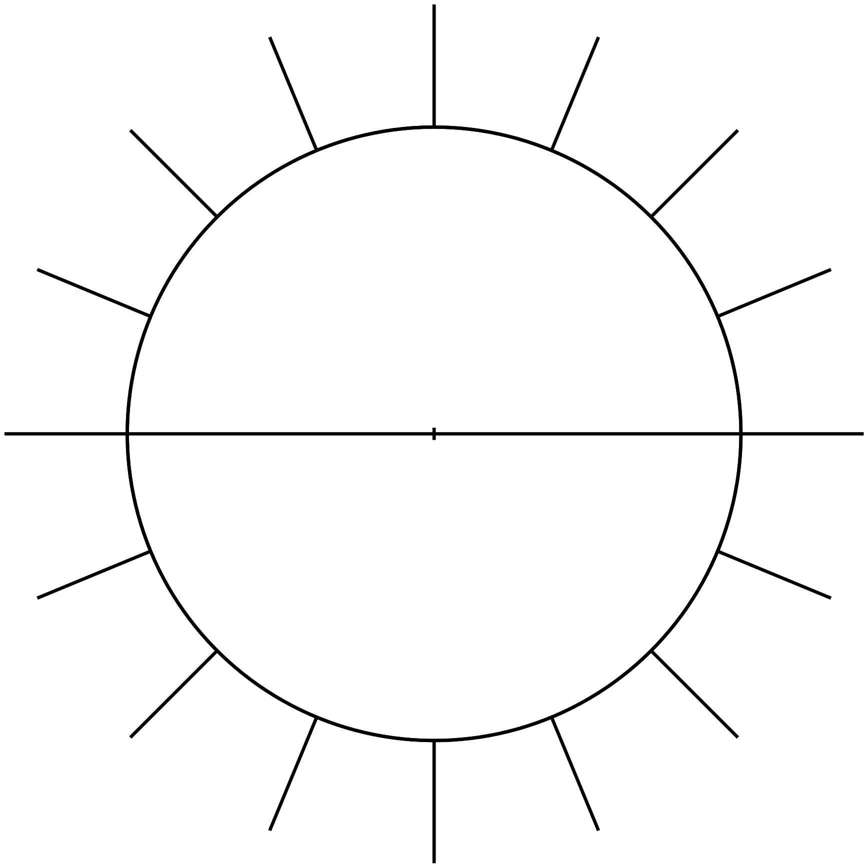
شکل ِ 7: پس از تغییر- ِ-سرعت ِ آنی

$$B = 0.5, \qquad \frac{R_1}{T} = 0.$$



شکل ِ 8: پس از تغییر- ِ-سرعت ِ آنی

$$B = 0.95, \qquad \frac{R_1}{T} = 0.$$



شکل ِ 9: پس از تغییر- ِ-سرعت ِ آنی

$$B = 1, \qquad \frac{R_1}{T} = 0.$$

4 پانوشتها

[1] John David Jackson; "Classical electrodynamics" 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 14