X1-123 (2017/04/07)

نیرو یِ مرکزی و نسبیت ِ خاص

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

اثر ِ نسبیت ِ خاص بر حرکت ِ یک جسم تحت ِ یک نیرو یِ مرکزی بررسی میشود. به ویژه حالت ی بررسی میشود که نیرو متناسب با عکس- ِ-مجذور- ِ-فاصله از مرکز است.

1 معادله یِ حرکت و کمیتها یِ پایسته

جسم ی به جرم ِ m تحت ِ نیرو یِ $\boldsymbol{F}$ حرکت میکند. معادله یِ حرکت میشود

$$m\,c\,\frac{\mathrm{d}(\gamma\,\boldsymbol{\beta})}{\mathrm{d}\,t}=\boldsymbol{F}. \tag{1}$$

t زمان، $(c\,\boldsymbol{\beta})$ سرعت، و γ ضریب ی لُرِنتس [1] است:

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t}. \tag{2}$$

$$\gamma=(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})^{-1/2}. \tag{3}$$

$\boldsymbol{r}$ مکان است. با تعریف ِ τ (ویژه-زمان) و $\boldsymbol{w}$ با

$$\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\mathrm{d}\,t}=\frac{1}{\gamma}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{w} = \gamma\,\boldsymbol{\beta}, \\ = \frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,\tau}, \tag{5}$$

دیده میشود

$$m\,c\,\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{F}. \tag{6}$$

$$\gamma = (1 + \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})^{1/2}. \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\gamma}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{\gamma}\,\boldsymbol{w}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}\,t}, \\ = \frac{1}{m\,c^2}\,\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t}, \tag{8}$$

رابطه یِ اخیر شکل ِ نسبیتی یِ قضیه یِ کار-انرژی-یِ-جنبشی ست:

$$\frac{\mathrm{d}(m\,c^2\,\gamma)}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t}. \tag{9}$$

اگر نیرو پایستار باشد، یعنی یک انرژی-یِ-پتانسیل ِ U وجود داشته باشد که تابع ِ فقط مکان باشد و

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\,U, \tag{10}$$

شکل ِ نسبیتی یِ پایستِگی یِ انرژی یِ مکانیکی نتیجه میشود:

$$\frac{\mathrm{d}(m\,c^2\,\gamma + U)}{\mathrm{d}\,t} = 0. \tag{11}$$

میگویم نیرو مرکزی ست، اگر نیرو در راستا یِ $\boldsymbol{r}$ باشد و تصویر َش در این راستا هم تابع ِ فقط r (اندازه یِ $\boldsymbol{r}$) باشد:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\,F(r). \tag{12}$$

از این پس فرض میکنم نیرو مرکزی ست. از معادله یِ (6) و این که نیرو با $\boldsymbol{r}$ موازی است نتیجه میشود

$$m\,c\,\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}\,t} = 0, \tag{13}$$

که شکلِ نسبیتی یِ پایستِگی یِ تکانه یِ زاویئی را میدهد:

$$\frac{\mathrm{d}(m\,c\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{w})}{\mathrm{d}\,t}=0. \tag{14}$$

تکانه-یِ-زاویئی یِ نسبیتی $(m\,c\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{w})$ است. $\boldsymbol{\ell}$ را تکانه یِ زاویئی تقسیم بر $(m\,c)$ تعریف میکنم:

$$\boldsymbol{\ell}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{w}. \tag{15}$$

از این که نیرو مرکزی ست، نتیجه میشود نیرو پایستار است و انرژی یِ پتانسیل تابعِ فقط r است. این انرژی-یِ-پتانسیل را با $(m\,c^2\,\Upsilon)$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$F=-m\,c^2\,\frac{\mathrm{d}\,\Upsilon}{\mathrm{d}\,r}. \tag{16}$$

$$\gamma+\Upsilon=\varepsilon. \tag{17}$$

ε یک ثابت است، که رابطه اَش با انرژی یِ نانسبیتی (E_{nr}) چنین است.

$$E_{\mathrm{nr}}=m\,c^2(\varepsilon-1). \tag{18}$$

2 حرکتِ شعاعی و معادله یِ مسیر

از ثابت-بودنِ $\boldsymbol{\ell}$ نتیجه میشود حرکت در یک صفحه (شاملِ مرکزِ نیرو) انجام میشود. اندازه یِ $\boldsymbol{\ell}$ را با ℓ، و مشتقِ Ξ نسبت به τ را با $\dot{\Xi}$ نشان میدهم. مختصاتِ قطبی (نسبت به مرکزِ نیرو) در صفحه یِ حرکت را با (r,φ) نشان میدهم، چنان که $\dot{\varphi}$ نامنفی باشد. دیده میشود

$$\ell=\frac{r^2\,\dot{\varphi}}{c}. \tag{19}$$

$$\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}=\frac{\dot{r}^2}{c^2}+\frac{\ell^2}{r^2}. \tag{20}$$

$$\gamma=\left(1+\frac{\dot{r}^2}{c^2}+\frac{\ell^2}{r^2}\right)^{1/2}. \tag{21}$$

با استفاده از (19) میشود مشتق-گیری نسبت به τ را بر حسبِ مشتق-گیری نسبت به φ نوشت. مشتقِ Ξ نسبت به φ را با Ξ' نشان میدهم. به این ترتیب،

$$\gamma=\left(1+\frac{\ell^2\,r'^2}{r^4}+\frac{\ell^2}{r^2}\right)^{1/2}. \tag{22}$$

با این عبارتها برا یِ γ، پایستگی یِ انرژی میشود

$$\left(1+\frac{\dot{r}^2}{c^2}+\frac{\ell^2}{r^2}\right)^{1/2}+\Upsilon=\varepsilon. \tag{23}$$

یا

$$\left(1+\frac{\ell^2\,r'^2}{r^4}+\frac{\ell^2}{r^2}\right)^{1/2}+\Upsilon=\varepsilon. \tag{24}$$

رابطه یِ (23) معادله یِ حرکت ِ شعاعی (شعاع بر حسب ِ ویژه-زمان)، و رابطه یِ (24) معادله یِ مسیر (شعاع بر حسب ِ زاویه) است. معادله یِ مسیر، با تغییر- ِ-متغیر ِ

$$\frac{1}{r}=u \tag{25}$$

میشود

$$(1+\ell^2\,u'^2+\ell^2\,u^2)^{1/2}+\Upsilon=\varepsilon. \tag{26}$$

حد ِ نانسبیتی یِ (23) و (24) و (26) وضع ی ست که عبارت ِ زیر ِ رادیکال در طرف ِ چپ نزدیک به یک است. در این حد رادیکال را بسط میدهم و برابریها را در $(m\,c^2)$ ضرب میکنم:

$$\frac{m\,\dot{r}^2}{2}+\frac{(m\,c\,\ell)^2}{2\,m\,r^2}+m\,c^2\,\Upsilon=m\,c^2(\varepsilon-1). \tag{27}$$

$$\frac{(m\,c\,\ell)^2\,r'^2}{2\,m\,r^4}+\frac{(m\,c\,\ell)^2}{2\,m\,r^2}+m\,c^2\,\Upsilon=m\,c^2(\varepsilon-1). \tag{28}$$

$$\frac{(m\,c\,\ell)^2\,u'^2}{2\,m}+\frac{(m\,c\,\ell)^2\,u^2}{2\,m}+m\,c^2\,\Upsilon=m\,c^2(\varepsilon-1). \tag{29}$$

3 حل ِ معادله یِ مسیر

$\tilde{\Upsilon}$ را چنین تعریف میکنم

$$\tilde{\Upsilon}=(1+\ell^2\,u^2)^{1/2}+\Upsilon. \tag{30}$$

از (26) دیده میشود ناحیه یِ مجاز برا یِ u جا یی ست که

$$\tilde{\Upsilon}\le\varepsilon. \tag{31}$$

البته رُشن است که برا یِ این که چنین ناحیه ای وجود داشته باشد، ε باید این قید را براورَد.

$$\min(\tilde{\Upsilon}) \le \varepsilon. \tag{32}$$

اگر u_0 یک نقطه یِ بازگشت باشد،

$$\tilde{\Upsilon}(u_0) = \varepsilon. \tag{33}$$

برا یِ u ها یی که (31) را بر میئاورَند، از (26) نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u} = \pm\left[\frac{(\varepsilon - \Upsilon)^2 - 1}{\ell^2} - u^2\right]^{-1/2}, \tag{34}$$

که با انتگرال-گیری از آن φ بر حسب ِ u به دست میئاید. از جمله، اگر u_1 و u_2 متناظر با، به ترتیب، اُج و حضیض باشند،

$$\Delta\,\varphi = \int_{u_1}^{u_2} \mathrm{d}\,u\;\left[\frac{(\varepsilon - \Upsilon)^2 - 1}{\ell^2} - u^2\right]^{-1/2}, \tag{35}$$

که $(\Delta\,\varphi)$ زاویه یِ جهتها یِ حضیض و اُج با هم است.

4 نیرو یِ عکس-ِ-مجذور-ِ-فاصله

برا یِ یک نیرو یِ مرکزی که متناسب با عکس ِ مجذور ِ فاصله است،

$$\begin{aligned} F &= \frac{m\,c^2\,k}{r^2}, \\ &= m\,c^2\,k\,u^2, \end{aligned} \tag{36}$$

که k یک ثابت است. نیرو راننده است اگر k مثبت باشد، و رباینده است اگر k منفی باشد. دیده میشود

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \frac{k}{r}, \\ &= k\,u. \end{aligned} \tag{37}$$

تعریف میکنم

$$\frac{k}{\ell} =: \kappa. \tag{38}$$

حالت ِ نانسبیتی متناظر با مقدارها یِ کوچک برا یِ $|\kappa|$ و $|1-\varepsilon|$ است.

بسته به مقدارها یِ κ حالتها یِ مختلف ی پیش میئاید:

a $0<\kappa$

در این حالت $\tilde\Upsilon$ نسبت به u صعودی ست. کمینه یِ $\tilde\Upsilon$ در $u=0$ رخ میدهد و این مقدار ِ کمینه 1 است. $\tilde\Upsilon$ از بالا بیکران است.

b $-1<\kappa<0$

در این حالت کمینه یِ $\tilde\Upsilon$ در $u=(-\kappa/\ell)(1-\kappa^2)^{-1/2}$ رخ میدهد و مقدار ِ این کمینه $(1-\kappa^2)^{1/2}$ است. $\tilde\Upsilon$ از بالا بیکران است.

c $\kappa<-1$

در این حالت $\tilde\Upsilon$ نسبت به u نزولی ست، و از پایین بیکران است.

اینها را میشود چنین خلاصه کرد.

$$0<\kappa: \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,\tilde\Upsilon}{\mathrm{d}\,u} > 0. \\ 1 \le \tilde\Upsilon < \infty. \end{cases} \tag{39}$$

$$-1<\kappa<0: \qquad \begin{cases} (1-\kappa^2)^{1/2} \le \tilde\Upsilon < \infty. \\ (1-\kappa^2)^{1/2} = \tilde\Upsilon\left[u = -\dfrac{\kappa}{\ell}\,(1-\kappa^2)^{-1/2}\right]. \end{cases} \tag{40}$$

$$\kappa<-1: \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,\tilde\Upsilon}{\mathrm{d}\,u} < 0. \\ -\infty < \tilde\Upsilon \le 1. \end{cases} \tag{41}$$

رابطه یِ (26) میشود

$$\ell^2\, u'^2 + (\ell^2 - k^2)\, u^2 + 2\, k\, \varepsilon\, u = \varepsilon^2 - 1, \tag{42}$$

یا،

$$\ell^2\, u'^2 + \ell^2 (1 - \kappa^2)\, u^2 + 2\, \ell\, \kappa\, \varepsilon\, u = \varepsilon^2 - 1. \tag{43}$$

رابطه یِ نانسبیتی یِ متناظر چنین است.

$$(m\, c\, \ell)^2\, u'^2 + (m\, c\, \ell)^2\, u^2 + 2\, m\, (m\, c^2\, k) u = 2\, m\, E_{\mathrm{nr}}. \tag{44}$$

برا یِ حل ِ (43) این حالتها را در نظر میگیرم.

d $|\kappa| < 1$

در این حالت مسئله شبیه ِ حالت ِ نانسبیتی ست. با انتخاب ِ مناسب ِ مبدئ ِ φ:

$$u = \frac{1}{\ell(1 - \kappa^2)} \{-\kappa\, \varepsilon + (\kappa^2 + \varepsilon^2 - 1)^{1/2}\, \cos[(1 - \kappa^2)^{1/2}\, \varphi]\}. \tag{45}$$

تفاوت ِ مهم با حالت ِ نانسبیتی این است که مدار، اگر مقید باشد هم بسته نیست: دُره یِ u نسبت به φ (برا یِ مدارها یِ مقید) برابر با $(2\, \pi + \delta\, \varphi)$ است، که

$$\delta\, \varphi = 2\, \pi [(1 - \kappa^2)^{-1/2} - 1]. \tag{46}$$

$\delta\, \varphi$ پیش-روی یِ حضیض بر دُره است.

e $|\kappa| = 1$

با انتخاب ِ مناسب ِ مبدئ ِ φ:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\mathrm{sgn}(\kappa)}{2\, \ell\, \varepsilon} (\varepsilon^2 - 1 - \varepsilon^2\, \varphi^2), \\ &= \frac{1}{2\, k\, \varepsilon} (\varepsilon^2 - 1 - \varepsilon^2\, \varphi^2). \end{aligned} \tag{47}$$

این را با بسط-دادن ِ (45) نسبت به $(1 - \kappa^2)$ هم میشد به دست آورد. البته اگر $(\kappa\, \varepsilon)$ منفی باشد باید $\{\cos[(1 - \kappa^2)^{1/2}\, \varphi]\}$ را با $\{\cos[(1 - \kappa^2)^{1/2}\, \varphi + \pi]\}$ جایگزین کرد.

f $|\kappa| > 1$

با انتخاب ِ مناسب ِ مبدئ ِ φ:

$$u = \frac{1}{\ell(\kappa^2 - 1)}\{\kappa\,\varepsilon - [\mathrm{sgn}(\kappa)](\kappa^2 + \varepsilon^2 - 1)^{1/2}\,\cosh[(\kappa^2 - 1)^{1/2}\,\varphi]\}. \qquad (48)$$

این را هم میشد از (45) و با استفاده از

$$\cos(\mathrm{i}\,\mathfrak{x}) = \cosh\mathfrak{x} \qquad (49)$$

به دست آورد.

5 پانوشتها

[1] Lorentz