X1-124 (2017/05/27)

مسیرِ خُرشید در آسمان

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

جهتِ خُرشید از دیدِ یک نقطه یِ ثابت در سطحِ زمین (نسبت به زمین) محاسبه میشود.
به این ترتیب شکلِ روزانه یِ مسیرِ خُرشید در آسمان به دست میئاید.

0 قراردادها

جهتِ اعتدالِ بهاری را با $\boldsymbol{q}$، و جهتِ محورِ قطبی یِ زمین را با $\boldsymbol{p}$ نشان میدهم. زاویه یِ سرعتِ زاویئی یِ مداری یِ زمین با $\boldsymbol{p}$ را با γ نشان میدهم. در یک نقطه از سطحِ زمین (رصدگاه)، مماس بر زمین به سو یِ شرق و شمال را با به ترتیب $\boldsymbol{e}$ و $\boldsymbol{n}$، و عمود بر سطحِ زمین به سو یِ بالا را با $\boldsymbol{u}$ نشان میدهم. بُعد و میل را با ترتیب η و δ، و ارتفاع و سمت را با به ترتیب α و β نشان میدهم. بُعدِ یک جهت زاویه یِ تصویرِ آن جهت بر صفحه یِ استوایی با $\boldsymbol{q}$ (جهتِ اعتدالِ بهاری) است، که پادساعتگرد سنجیده میشود. میلِ یک جهت زاویه یِ آن جهت نسبت به صفحه یِ استوایی (عمود بر $\boldsymbol{p}$) است، که به سو یِ شمال سنجیده میشود. دیده میشود

$$\sin\delta_{\mathrm{s}} = (\sin\gamma)(\sin\phi), \tag{1}$$

که شاخصِ s نشانه یِ خُرشید است، و ϕ زاویه یِ جهتِ خُرشید با $\boldsymbol{q}$ است. عرضِ جغرافیایی یِ رصدگاه را با λ نشان میدهم. عرضِ جغرافیایی یِ رصدگاه هم ان میلِ رصدگاه است. ارتفاعِ یک جهت زاویه یِ آن جهت با مماس بر زمین است، که به سو یِ بالا سنجیده میشود. سمتِ یک جهت زاویه یِ تصویرِ آن جهت بر مماس بر زمین با جهتِ شمالی یِ مماس بر زمین ($\boldsymbol{n}$) است، که ساعتگرد سنجیده میشود. سرعتِ زاویِئی یِ خُرشیدی یِ میانگینِ زمین را با $\bar{\omega}$ نشان میدهم:

$$\bar{\omega} = \frac{2\,\pi}{\mathrm{day}}, \tag{2}$$

که day یک روز (24 ساعت) است. دوران به اندازه یِ θ حُلِ $\boldsymbol{v}$ را با $R(\theta\,\boldsymbol{v})$ نشان میدهم:

$$[R(\theta\,\boldsymbol{v})]\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\,\cos\theta + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})\,\sin\theta. \tag{3}$$

1 جهتِ خُرشید

جهتِ خُرشید را با $\boldsymbol{s}$ و چهتِ خُرشید در ظهر را با $\boldsymbol{s}_0$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{n}\,\sin(\delta_\mathrm{s}-\lambda) + \boldsymbol{u}\,\cos(\delta_\mathrm{s}-\lambda). \tag{4}$$

حرکتِ روزانه یِ خُرشید در آسمان دوران ی با سرعتِ زاویِئی یِ $(-\bar{\omega}\,\boldsymbol{p})$ است. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{s}_0) + \boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{s}_0\times\boldsymbol{p})\,\cos\chi - (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{s}_0)\,\sin\chi, \tag{5}$$

که

$$\chi = \bar{\omega}\,t, \tag{6}$$

و t زمانِ گذشته از ظهر است. با استفاده از

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{n}\,\cos\lambda + \boldsymbol{u}\,\sin\lambda, \tag{7}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s} = {}& \boldsymbol{e}[-(\cos\delta_\mathrm{s})(\sin\chi)] + \boldsymbol{n}[(\cos\lambda)(\sin\delta_\mathrm{s}) - (\sin\lambda)(\cos\delta_\mathrm{s})(\cos\chi)]\\ &+ \boldsymbol{u}[(\sin\lambda)(\sin\delta_\mathrm{s}) + (\cos\lambda)(\cos\delta_\mathrm{s})(\cos\chi)].\end{aligned} \tag{8}$$

بر حسب ِ ارتفاع و سمت ِ خُرشید،

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}(\cos\alpha_{\rm s})(\sin\beta_{\rm s}) + \boldsymbol{n}(\cos\alpha_{\rm s})(\cos\beta_{s}) + \boldsymbol{u}(\sin\alpha_{\rm s}). \tag{9}$$

به این ترتیب،

$$\sin\alpha_{\rm s} = (\sin\lambda)(\sin\delta_{\rm s}) + (\cos\lambda)(\cos\delta_{\rm s})(\cos\chi). \tag{10}$$

$$\sin\beta_{\rm s} = -\frac{(\cos\delta_{\rm s})(\sin\chi)}{\cos\alpha_{\rm s}}. \tag{11}$$

$$\cos\beta_{s} = \frac{(\cos\lambda)(\sin\delta_{\rm s}) - (\sin\lambda)(\cos\delta_{\rm s})(\cos\chi)}{\cos\alpha_{\rm s}}. \tag{12}$$

$(\cos\alpha_{\rm s})$ هم مثبت است. دیده میشود

$$\alpha_{\rm s} = \sin^{-1}[(\sin\lambda)(\sin\delta_{\rm s}) + (\cos\lambda)(\cos\delta_{\rm s})(\cos\chi)]. \tag{13}$$

$$\beta_{\rm s} = \pi + \zeta\ \cos^{-1}\left\{\frac{(\sin\lambda)(\cos\delta_{\rm s})(\cos\chi) - (\cos\lambda)(\sin\delta_{\rm s})}{\sqrt{1 - [(\sin\lambda)(\sin\delta_{\rm s}) + (\cos\lambda)(\cos\delta_{\rm s})(\cos\chi)]^2}}\right\}. \tag{14}$$

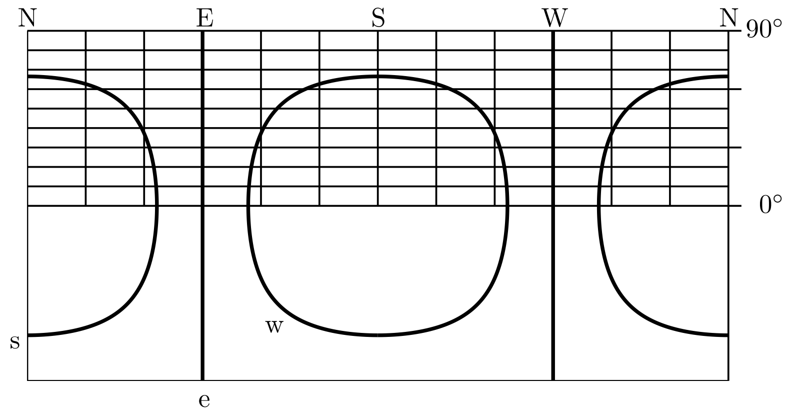
ζ پیش از ظهر (-1) و پس از ظهر $(+1)$ است.

پارامترها یی که در شکل ِ مسیر ِ روزانه یِ خُرشید ظاهر میشوند γ و λ و ϕ اند. از اینها γ ثابت است:

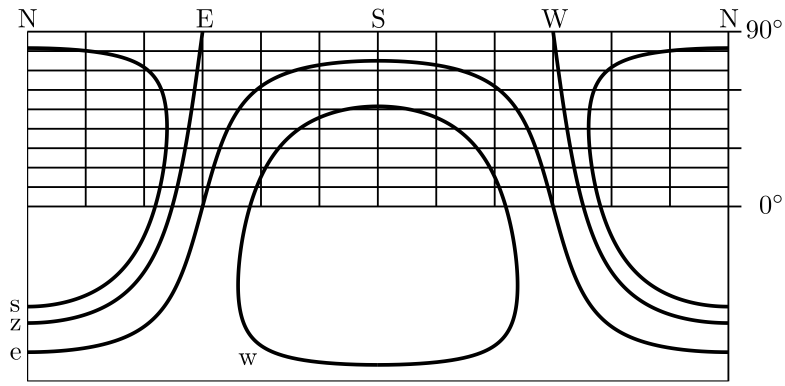
$$\gamma = 23.45^\circ. \tag{15}$$

λ برا یِ هر رصدگاه ثابت است، و ϕ به روز ِ رصد بستِگی دارد. ϕ برا یِ انقلاب ِ زمستانی، اعتدال ِ بهاری، و انقلاب ِ تابستانی، به ترتیب، $(-\pi/2)$ و صفر و $(\pi/2)$ است.

شکلها یِ زیر مسیر ِ روزانه یِ خُرشید در چند جا و چند روز را نشان میدهند. محور ِ افقی سمت و محور ِ عمودی ارتفاع است. ناحیه یِ مدرج ناحیه یِ بالا یِ افق است. به این ترتیب، بخش ی از مسیر که واقعَن دیده میشود بخش ی است که درون ِ ناحیه یِ مدرج است. N و E و S و W در بالا یِ شکلها، به ترتیب، شمال، شرق، جنوب، و غرب َند. w و e و s در پایین ِ شکلها، به ترتیب، انقلاب ِ زمستانی، اعتدال، و انقلاب ِ تابستانی یَند.

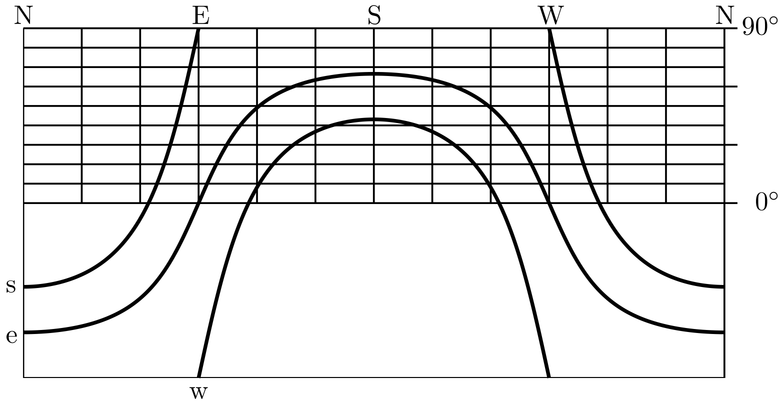


شکلِ 1: $\lambda = 0°$ (استوا)

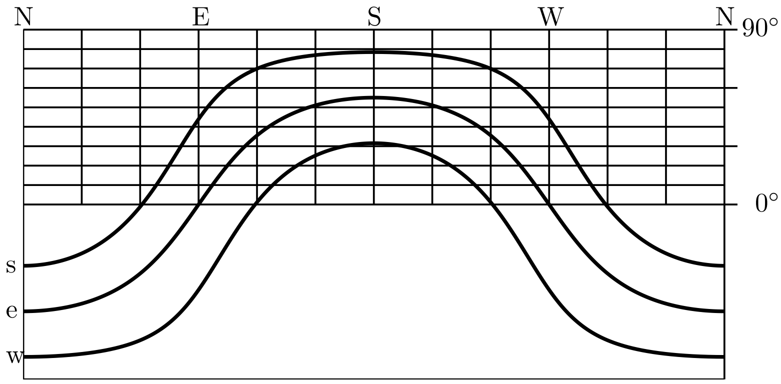


شکلِ 2: $\lambda = 15°$

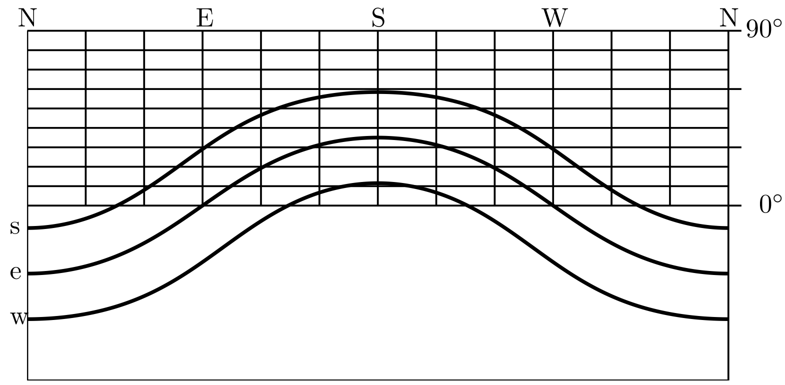
مسیرِ z زمان ی ست (هر سال دُ روز) که ظهر خُرشید در سرسو ست.



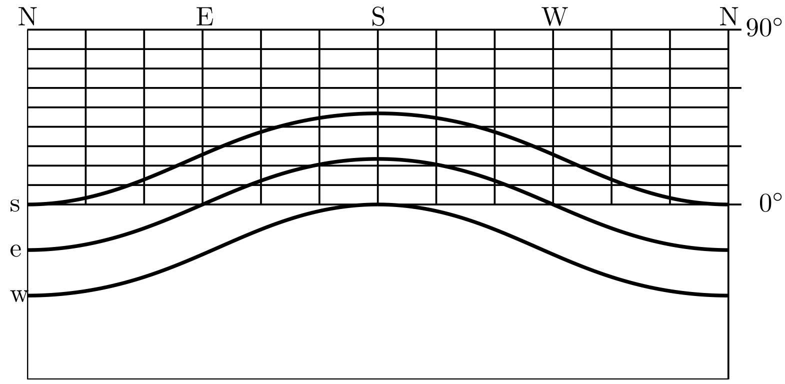
شکل ِ3: $\lambda = 23.45^\circ$ (رأس‌السرطان)



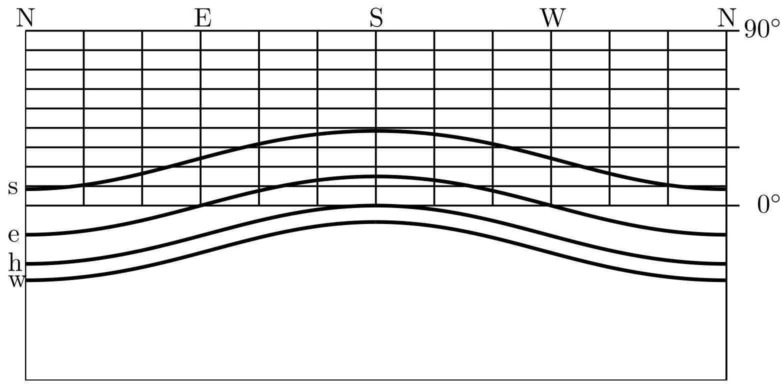
شکل ِ4: $\lambda = 35^\circ$ (تهران)



شکل ِ 5: $\lambda = 55°$

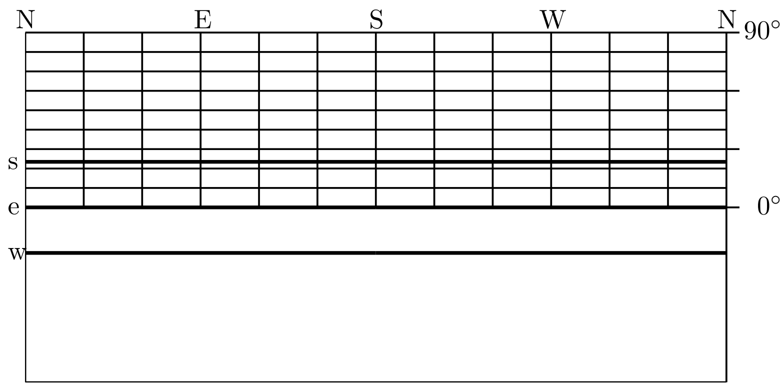


شکل ِ 6: $\lambda = 66.55°$ (مدار ِ قطبی)



شکل ِ 7: $\lambda = 75^\circ$

مسیر ِ h زمان ی ست (هر سال دُ روز) که ظهر خُرشید در افق است.



شکل ِ 8: $\lambda = 90^\circ$ (قطب)

2 شیب ِ مسیر، و مدت ِ طلوع و غروب

شیب ِ مسیر (مشتق ِ ارتفاع نسبت به سمت) را میشود از (10) و (12) به دست آورد. دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,\alpha_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\,\chi} = -\frac{(\cos\lambda)(\cos\delta_\mathrm{s})(\sin\chi)}{\cos\alpha_\mathrm{s}}. \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\beta_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\,\chi} = -\frac{1}{\sin\beta_\mathrm{s}}\left[\frac{(\sin\lambda)(\cos\delta_\mathrm{s})(\sin\chi)}{\cos\alpha_\mathrm{s}} + (\cos\beta_\mathrm{s})(\tan\alpha_\mathrm{s})\frac{\mathrm{d}\,\alpha_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\,\chi}\right]. \tag{17}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\mathrm{d}\,\beta_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\,\alpha_\mathrm{s}} = \frac{\tan\lambda}{\sin\beta_\mathrm{s}} - \frac{\tan\alpha_\mathrm{s}}{\tan\beta_\mathrm{s}}. \tag{18}$$

در طلوع و غروب، α_s صفر است. $\mathfrak{X}$ متناظر با طلوع و غروب را با $\mathfrak{X}_\mathrm{h}$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\cos\chi_\mathrm{h} = (\tan\lambda)(\tan\delta_\mathrm{s}). \tag{19}$$

$$\sin\chi_\mathrm{h} = u\,\frac{\sqrt{\cos^2\delta_\mathrm{s} - \sin^2\lambda}}{(\cos\lambda)(\cos\delta_\mathrm{s})}. \tag{20}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\alpha_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\,\chi}\right)_\mathrm{h} = -u\,\sqrt{\cos^2\delta_\mathrm{s} - \sin^2\lambda}. \tag{21}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\alpha_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\,\beta_s}\right)_\mathrm{h} = -u\,\frac{\sqrt{\cos^2\delta_\mathrm{s} - \sin^2\lambda}}{\sin\lambda}. \tag{22}$$

رابطه یِ آخر زاویه یِ مسیر ِ خُرشید با افق در طلوع و غروب را میدهد. این زاویه را با θ نشان میدهم:

$$\theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\cos^2\delta_\mathrm{s}}{\sin^2\lambda} - 1}. \tag{23}$$

مسیر ِ خُرشید در آسمان در طلوع و غروب، هر چه $|\delta_\mathrm{s}|$ کوچکتر باشد (زمان به اعتدال نزدیکتر باشد) و هر چه $|\lambda|$ کوچکتر باشد (رصدگاه به استوا نزدیکتر باشد) به راستا یِ عمود بر افق نزدیکتر است. فقط در استوا ست که خُرشید عمودی طلوع و غروب میکند، و آنجا هم خُرشید همیشه عمودی طلوع و غروب میکند.

مدت ی که طول میکشد تا خُرشید طلوع یا غروب کند را با τ نشان میدهم.

$$\tau = \frac{\mathrm{day}}{2\,\pi}\left|\left(\frac{\mathrm{d}\,\alpha_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\,\chi}\right)_0\right|^{-1}(\Delta\,\alpha_\mathrm{s}). \tag{24}$$

$(\Delta\,\alpha_\mathrm{s})$ اختلاف ِ ارتفاع ِ خُرشید در آغاز و پایان ِ طلوع (یا غروب) است. البته $(\Delta\,\alpha_\mathrm{s})$ قراردادی ست: به این بستِگی دارد که آغاز و پایان ِ طلوع (یا غروب) چگونه تعریف شوند. یک تعریف این است که

آغاز (پایان) ِ طلوع این است که بالاترین (پایینترین) نقطه یِ خُرشید بر افق مماس شود. در این صورت $(\Delta\,\alpha_\mathrm{s})$ قطر ِ ظاهری یِ خُرشید میشود. رابطه یِ (24)، با استفاده از (21) میشود

$$\tau=\frac{\mathrm{day}}{2\,\pi}\,\frac{\Delta\,\alpha_\mathrm{s}}{\sqrt{\cos^2\lambda-\sin^2\delta_\mathrm{s}}}. \tag{25}$$

τ هم نسبت به $|\delta_\mathrm{s}|$ و $|\lambda|$ صعودی ست. τ_m (کمینه یِ τ) میشود

$$\tau_\mathrm{m}=\frac{\mathrm{day}}{2\,\pi}(\Delta\,\alpha_\mathrm{s}). \tag{26}$$

با مقدار ِ 0.5 درجه برا یِ قطر ِ ظاهری یِ خُرشید:

$$\Delta\,\alpha_\mathrm{s}=\frac{2\,\pi}{360^\circ}\,0.5^\circ, \tag{27}$$

نتیجه میشود

$$\tau_\mathrm{m}=2\,\mathrm{min}. \tag{28}$$

$$\tau=\frac{2\,\mathrm{min}}{\sqrt{\cos^2\lambda-\sin^2\delta_\mathrm{s}}}. \tag{29}$$