**X1-125 (2017/07/27)**

# بلور و پتانسیل

**محمد خرمی** mamwad@mailaps.org

پتانسیل ِ الکتریکی در یک شبکه یِ مکعب-مستطیلی محاسبه میشود. برا یِ حالت ِ یک-بُعدی، شکل ِ بسته یِ پتانسیل، میدان، و نیرو هم به دست میئاید.

## 1 شبکه

یک شبکه آرایه ای دُرئِی ست. یعنی یک دسته بردار ِ ($2\,\boldsymbol{a}_i$) (که تعداد ِ شان بُعد ِ شبکه است) هستند، که انتقال به اندازه یِ هر ترکیب ِ خطی از آنها با ضرایب ِ صحیح مجموعه را بی-تغییر میگذارد. شبکه مکعب-مستطیلی ست، اگر این بردارها (دُرِها) بر هم عمود باشند. $U_i$ (تبدیل ِ خطی یِ انعکاس ِ محور ِ $i$) چنین تعریف میشود.

$$U_i\,\boldsymbol{a}_j=(1-2\,\delta_{i\,j})\boldsymbol{a}_j. \tag{1}$$

این تبدیل $\boldsymbol{a}_i$ را قرینه میکند و بقیه یِ $\boldsymbol{a}_j$ ها را بی-تغییر میگذارد. میگویم شبکه زُج است، اگر اثر ِ همه یِ $U_i$ ها بر شبکه همانی باشد، و میگویم شبکه فرد است، اگر اثر ِ همه یِ $U_i$ ها بر شبکه این باشد که چگالی-یِ-بار در شبکه قرینه شود (یعنی جا یِ بارها یِ مثبت و منفی با هم عوض شود).

برا یِ محاسبه یِ پتانسیلِ الکتریکی در یک شبکه از ذراتِ باردار، کافی ست پتانسیل در یک متوازی‌السطوح حساب شود که یال‌ها یَ ش $(2\,\boldsymbol{a}_i)$ ها یَند، با این شرط که هر یک از $(2\,\boldsymbol{a}_i)$ ها یک دُره یِ پتانسیل است. در ادامه فقط شبکه‌ها یِ مکعب‌-مستطیلی یِ فرد یا زُج را بررسی میکنم. در این حالت کافی ست پتانسیل در یک مکعب‌-مستطیل حساب شود که یال‌ها یَ ش $\boldsymbol{a}_i$ ها یَند و یک رئس َ ش مبدئ است. برا یِ شبکه یِ فرد، پتانسیل بر وجه‌ها یِ چنین متوازی‌السطوح ی صفر میشود. برا یِ شبکه یِ زُج، مشتقِ سویی یِ پتانسیل با $\boldsymbol{a}_i$ بر وجه‌ها یی که $\boldsymbol{a}_i$ با آن‌ها موازی نیست صفر میشود. ، با این شرطِ اضافه که در هر از این پس فقط شبکه‌ها یی را برررسی میکنم که در هر مکعب‌-مستطیل که یال‌ها یِ $\boldsymbol{a}_i$ ها یَند فقط یک بارِ نقطه‌ئی باشد. مقدارِ بار را با $q$، و جا یِ بارِ نقطه‌ئی را با $\boldsymbol{r}'$ نشان میدهم. شاخص‌ها یِ e و o نشانه یِ، به ترتیب، زُج و فرد َند. پتانسیل را با $\phi$، میدان را با $\boldsymbol{E}$، و نیرو (یِ وارد بر بارِ نقطه‌ئی) را با $\boldsymbol{F}$ نشان میدهم.

## 2 پتانسیل

برا یِ مکعب‌-مستطیل‌ها یِ فرد، تنها‌-بارِ درونِ هر مکعب‌-مستطیل را بارِ نقطه‌ئی یِ درونِ آن میگیرم. به این ترتیب معادله یِ پُوَسُن [1] برا یِ مکعب‌-مستطیل‌ها (پاره‌-خط‌ها) یِ فرد میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\phi_{\rm o}=-\frac{q}{\varepsilon_0}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{2}$$

از قضیه یِ گاؤس [2] نتیجه میشود برا یِ مکعب‌-مستطیل‌ها یِ زُج بارِ کلِ درونِ هر مکعب‌-مستطیل باید صفر باشد. پس جز بارِ نقطه‌ئی یک تُزیع‌-ِ-بارِ دیگر هم لازم است. این تُزیع‌-ِ-بار را یکنواخت میگیرم. به این ترتیب معادله یِ پُوَسُن [1] برا یِ مکعب‌-مستطیل‌ها یِ زُج میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\phi_{\rm e}=-\frac{q}{\varepsilon_0}\left[\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\frac{1}{V}\right], \tag{3}$$

که $V$ حجمِ مکعب‌-مستطیل است.

برا یِ حلِ (2) یا (3) این تغییر‌-ِ-متغیر را به کار میبرم:

$$\phi_{\rm m}=-\frac{q}{\varepsilon_0}(\chi+\psi_{\rm m}). \tag{4}$$

$\mathrm{m}$ مقدارها یِ $\mathrm{o}$ یا $\mathrm{e}$ را میپذیرد و $[(-q/\varepsilon_0)\chi]$ پتانسیل ِ حاصل از بار ِ نقطِئی (به-تنهایی) است:

$$\chi = \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{2-D}}{(2-D)\Omega_{D-1}}, \qquad D \neq 2. \tag{5}$$

$$\chi = \frac{1}{2\,\pi}\,\ln\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{r_0}, \qquad D = 2. \tag{6}$$

$D$ بُعد ِ فضا ست، $\Omega_n$ مساحت ِ یک کره یِ $n$-بُعدی به شعاع ِ یک است، و $r_0$ یک ثابت است. همچنین،

$$\psi_{\mathrm{m}} = \Upsilon_{\mathrm{m}} + \tilde{\psi}_{\mathrm{m}}, \tag{7}$$

که

$$\Upsilon_{\mathrm{m}} = -\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{2\,D\,V}\,\delta^{e}_{\mathrm{m}}. \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\tilde{\psi}_{\mathrm{m}} = 0. \tag{9}$$

شرط ِ مرزی برا یِ $\tilde{\psi}$ چنین است که (بر مرز).

$$\tilde{\psi}_{\mathrm{o}} = -\chi. \tag{10}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\tilde{\psi}_{\mathrm{e}} = -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\chi+\Upsilon_{\mathrm{e}}) + w. \tag{11}$$

$\boldsymbol{n}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر مرز است، و $w$ تابع ی ست که بر مرز تعریف شده و میانگین َ ش صفر است:

$$\oint_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,S\,w = 0, \tag{12}$$

که $\mathbb{V}$ هم ان مکعب-مستطیل است.

## 3 نیرو

برا یِ شبکه یِ فرد، نیرو چنین میشود

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{o}} = \frac{Q^2}{\varepsilon_0}(\boldsymbol{\nabla}\,\psi_{\mathrm{o}})(\boldsymbol{r}'). \tag{13}$$

برا یِ محاسبه یِ نیرو میدان ِ حاصل از خُد ِ بار حذف شده. برا یِ شبکه یِ زُج،

$$\boldsymbol{F}_{\rm e} = \boldsymbol{F}_{\rm e\,p} + \boldsymbol{F}_{\rm e\,s}, \tag{14}$$

که شاخصها یِ p و s متناظر با بخشها یِ ناشی از، به ترتیب، نقطِئی و یکنواخت ِ تُزیع- ِ-بار َند. برا یِ محاسبه یِ هر یک از این نیروها، یک گوی به شعاع ِ $R$ میگیرم که مرکز َش مرکز ِ $\mathbb{V}$ است. نیرو یِ حاصل از همه یِ مکعب-مستطیلها یی که مرکز ِشان درون ِ این گوی است، در حد ِ $(R \to \infty)$ هم ان نیرو یِ مُرِد- ِ-نظر است. برا یِ $\boldsymbol{F}_{\rm e,s}$، میشود اول میدان ِ حاصل از یک چگالی-یِ-بار ِ یکنواخت را حساب کرد. چنین-میدان ی یکتا نیست، اما با روش- ِ-حدگیری یِ بالا یک میدان خاص میشود، و آن میدان ی ست که نسبت به مرکز ِ مکعب-مستطیل کروی-متقارن است. این میدان، با استفاده از قضیه یِ گاؤس [2] چنین میشود.

$$\boldsymbol{E}_{\rm s} = -\frac{q}{\varepsilon_0\, D}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), \tag{15}$$

که $\boldsymbol{r}_0$ جا یِ مرکز ِ مکعب-مستطیل است. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{F}_{\rm e\,s} = -\frac{q^2}{\varepsilon_0\, D}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0). \tag{16}$$

## 4 بُعد ِ یک

در بُعد ِ یک معادله یِ (2) میشود

$$\frac{{\rm d}^2\,\phi_{\rm o}}{{\rm d}\,x^2} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\delta(x - x'). \tag{17}$$

به جا یِ بار ِ $q$ چگالی-یِ-سطحی-یِ-بار ِ $\sigma$ آمده. طول ِ پاره-خط $a$ است. تنها-مختصه یِ فضا هم با $x$ نشان داده شده. از حل ِ معادلات نتیجه میشود

$$\psi_{\rm o} = -\frac{x'(a - x')}{a} + \left(\frac{x'}{a} - \frac{1}{2}\right)(x - x'). \tag{18}$$

به این ترتیب،

$$E_\mathrm{o} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\,\mathsf{sgn}(x-x') + \frac{x'}{a} - \frac{1}{2}\right]. \tag{19}$$

$$f_\mathrm{o} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{x'}{a} - \frac{1}{2}\right). \tag{20}$$

$f$ نیرو-بر-مساحت است. این نیرو هر بار را به سو یِ نزدیکترین بار و البته در جهت ِ دور-شدن از همسایه یِ دیگر میرانَد.

در بُعد ِ یک معادله یِ $(3)$ میشود

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\phi_\mathrm{e}}{\mathrm{d}\,x^2} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\delta(x-x') - \frac{1}{a}\right]. \tag{21}$$

از حل ِ معادلات نتیجه میشود

$$\psi_\mathrm{e} = -\frac{(x-x')^2}{2\,a} + \alpha + \left(\frac{1}{2} - \frac{x'}{a}\right)(x-x'), \tag{22}$$

که $\alpha$ ثابت ی دلبخاه است. به این ترتیب،

$$E_\mathrm{e} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\,\mathsf{sgn}(x-x') + \frac{1}{2} - \frac{x}{a}\right]. \tag{23}$$

$$f_\mathrm{e} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\left(-\frac{x'}{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{24}$$

نیرو یِ وارد بر بار ِ صفحِئی آن را به سمت ی میرانَد که فاصله یِ صفحات ِ مجاور از هم یکسان شود، بر عکس ِ حالت ِ فرد.

## 5 بُعد ِ بیش از یک

برا یِ شکه یِ فرد، $\psi_\mathrm{o}$ را به شکل ِ مجموع ِ تابعها یی مینویسم که مقدار ِ هر کدام، در یک ی از وجهها یِ مکعب-مستطیل مثل ِ مقدار ِ $\psi_\mathrm{o}$ است و در بقیه یِ وجهها صفر است (و البته همه یِ این توابع همساز َند):

$$\psi_\mathrm{o} = \sum_{i=1}^{D}(\psi_{\mathrm{o}\,i}^{-} + \psi_{\mathrm{o}\,i}^{+}), \tag{25}$$

که

$$\psi^{\zeta}_{\mathrm{o}\,i} = \psi_{\mathrm{o}}, \quad r^i = \frac{1+\zeta}{2}\,a^i. \tag{26}$$

$\zeta$ مقدارها یِ $-$ یا $+$ را میپذیرد. تعریف میکنم

$$b^i = \left[\sum_{j\neq i}(a^j)^2\right]^{1/2}, \tag{27}$$

که

$$(\boldsymbol{a}_i)^j = a^j\,\delta^j_i. \tag{28}$$

دیده میشود

$$\psi^{\zeta}_{\mathrm{o}\,i}(\boldsymbol{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} p^{\zeta}_{\mathrm{o}\,i\,m}\,\sinh\frac{m\,\pi[(1-\zeta)a^i + 2\,\zeta\,r^i]}{2\,b^i}\prod_{j\neq}\sin\frac{m\,\pi\,r^j}{a^i}. \tag{29}$$

ضریبها با بسطِ فوریه [3] یِ $\chi$ در مرز به دست میائیند:

$$\sum_{m=1}^{\infty} p^{\zeta}_{\mathrm{o}\,i\,m}\,\sinh\frac{m\,\pi\,a^i}{b^i}\prod_{j\neq i}\sin\frac{m\,\pi\,r^j}{a^i} = -\chi\left(r^i = \frac{1+\zeta}{2}\,a^i\right). \tag{30}$$

برا یِ شبکه یِ زُج، $\tilde{\psi}_{\mathrm{e}}$ را به شکلِ مجموعِ تابعها یی مینویسم که مشتقِ عمودی یِ هر کدام، در یک ی از وجهها یِ مکعب-مستطیل مثلِ مشتقِ عمودی یِ $\tilde{\psi}_{\mathrm{e}}$ به اضافه یِ یک مقدارِ ثابت است و در بقیه یِ وجهها صفر است (و البته همه یِ این توابع همساز َند):

$$\tilde{\psi}_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{D}(\psi^{-}_{\mathrm{e}\,i} + \psi^{+}_{\mathrm{e}\,i}), \tag{31}$$

که

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\psi^{\zeta}_{\mathrm{e}\,i} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\tilde{\psi}_{\mathrm{e}} + w^{\zeta}_{i}, \quad r^i = \frac{1+\zeta}{2}\,a^i. \tag{32}$$

ثابتها یِ $w^{\zeta}_{\alpha}$ چنان َند که انتگرالِ طرفِ راست بر وجهِ مُرِد-ِنظر صفر شود. دیده میشود

$$\psi^{\zeta}_{\mathrm{e}\,i}(\boldsymbol{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{\zeta}_{\mathrm{o}\,i\,m}\,\cosh\frac{m\,\pi[(1-\zeta)a^i + 2\,\zeta\,r^i]}{2\,b^i}\prod_{j\neq i}\cos\frac{m\,\pi\,r^j}{a^i}. \tag{33}$$

ضریبها با بسط- ِ فوریه [3] یِ مشتق ِ عمودی یِ $(\chi + \Upsilon_{\mathrm{e}})$ در مرز به دست میئایند:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\,\pi\,\zeta}{b^i}\, q^{\zeta}_{\mathrm{o}\,i\,m}\, \sinh \frac{m\,\pi\,a^i}{b^i} \prod_{j\neq i} \cos \frac{m\,\pi\,r^j}{a^i} = -\frac{\partial(\chi + \Upsilon_{\mathrm{e}})}{\partial\, r^i} \left( r^i = \frac{1+\zeta}{2}\, a^i \right). \tag{34}$$

## 6 پانوشتها

[1] Poisson

[2] Gauss

[3] Fourier