X1-126 (2017/08/21)

نیرو و انرژی برا یِ یک مجموعه رسانا

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

نیرو بر مساحت ِ وارد بر یک دسته رسانا یِ باردار به دست میئاید، با استفاده از تغییر ِ انرژی در اثر ِ جا-به-جایی یِ مجازی و نیز به طُر ِ مستقیم.

0 مسئله

مرز ِ ناحیه یِ $\mathbb{V}$ شامل ِ یک دسته رسانا ست. البته این ناحیه ممکن است تا بینهایت هم برود، که در این صورت بینهایت هم مثل ِ یک رسانا یِ بزرگ در نظر گرفته میشود، که پتانسیل َ ش ثابت است. رسانا یِ i را با $\mathbb{S}_i$ نشان میدهم. بردار ِ یکه یِ عمود بر مرز ِ رسانا را با $\boldsymbol{n}$ نشان میدهم، و جهت ِ آن را به بیرون ِ ناحیه یِ $\mathbb{V}$ میگیرم. رسانا یِ i به پتانسیل ِ V^i وصل است. اگر $\mathbb{V}$ تا بینهایت رفت V^0 (پتانسیل ِ بینهایت) را هم صفر میگیرم. میدان ِ الکتریکی را با $\boldsymbol{E}$، پتانسیل ِ الکتریکی را با ϕ، و بار رسانا یِ i را با Q_i نشان میدهم. U (انرژی یِ الکترُستاتیک ِ این مجموعه) میشود

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\, V\, \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}, \tag{1}$$

یا

$$U = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\, V^i. \tag{2}$$

مسئله این است که نیرو-بر-مساحت در هر نقطه از مرز کدام است.

1 روشِ جا-به-جایی-یِ-مجازی

کارِ نیرو یِ الکتریکی به خاطرِ جا-به-جایی یِ مجازی یِ مرز، برابر با تغییرِ انرژی یِ الکترُستاتیک در پتانسیلِ ثابت (با هم ان جا-به-جایی یِ مجازی) است (مثلَن [1]) :

$$(\delta\, U)_V = \oint_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\, S\, \boldsymbol{f}\cdot\delta\,\boldsymbol{r} + o(\delta\,\boldsymbol{r}), \tag{3}$$

که $\boldsymbol{f}$ نیرو-بر-مساحت است و $\delta\,\boldsymbol{r}$ جا-به-جایی یِ مجازی ست. کمیتها یِ متناظر با حالت ی که جا-به-جایی یِ مجازی انجام شده است را با پریم نشان میدهم. رُشن است که

$$\delta\,\Xi = \Xi' - \Xi. \tag{4}$$

از (1) نتیجه میشود

$$(\delta\, U)_V = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_{\mathbb{V}'} \mathrm{d}\, V\, \boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{E}' - \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\, V\, \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\right) \tag{5}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{V}'} \mathrm{d}\, V\, \boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{E} - \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\, V\, \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} = &-\left(\oint_{\partial\,\mathbb{V}'} \mathrm{d}\, S\, \phi'\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} - \oint_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\, S\, \phi\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}\right)\\ &+\left(\int_{\mathbb{V}'} \mathrm{d}\, V\, \phi'\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} - \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\, V\, \phi\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

پرانتز ِ دوم در طرف ِ راست صفر است، چون دیورژانس ِ میدان ِ الکتریکی صفر است. تغییر ِ $\mathbb{V}$ به خاطر ِ تغییر ِ $\mathbb{S}_i$ را با $\mathbb{V}_i$ نشان میدهم. $(\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\,S)$ را با $\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\oint_{\partial\,\mathbb{V}'}\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\,\phi' - \oint_{\partial\,\mathbb{V}}\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\,\phi = \sum_i V^i\,\left(\oint_{\mathbb{S}'_i} - \oint_{\mathbb{S}_i}\right)\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E},$$
$$= \sum_i V^i\,\int_{\partial(\delta\,\mathbb{V}_i)}\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E},$$
$$= \sum_i V^i\,\int_{\delta\,\mathbb{V}_i}\mathrm{d}\,V\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}. \tag{7}$$

به این ترتیب پرانتز ِ اول در طرف ِ راست ِ (6) هم صفر است. پس

$$\int_{\mathbb{V}'}\mathrm{d}\,V\,\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{E} - \int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}\,V\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} = 0. \tag{8}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$(\delta\,U)_V = \frac{\varepsilon_0}{2}\,\int_{\mathbb{V}'}\mathrm{d}\,V\,\boldsymbol{E}'\cdot\delta\,\boldsymbol{E}, \tag{9}$$

یا

$$(\delta\,U)_V = \frac{\varepsilon_0}{2}\,\int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}\,V\,\boldsymbol{E}\cdot\delta\,\boldsymbol{E} + o(\delta\,\boldsymbol{r}). \tag{10}$$

به این ترتیب، با استفاده از این که دیورژانس ِ میدان ِ الکتریکی صفر است،

$$(\delta\,U)_V = -\frac{\varepsilon_0}{2}\,\int_{\mathbb{V}}\mathrm{d}\,V\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\,\delta\,\phi) + o(\delta\,\boldsymbol{r}),$$
$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\,\oint_{\partial\,\mathbb{V}}\mathrm{d}\,S\,\boldsymbol{n}\cdot\,\boldsymbol{E}\,\delta\,\phi + o(\delta\,\boldsymbol{r}). \tag{11}$$

شرط ِ مرزی برا یِ پتانسیل نتیجه میدهد

$$\delta\,\phi + (\boldsymbol{\nabla}\,\phi)\cdot\delta\,\boldsymbol{r} = o(\delta\,\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r}\in(\partial\,\mathbb{V}). \tag{12}$$

به این ترتیب،

$$(\delta\,U)_V = -\frac{\varepsilon_0}{2}\,\oint_{\partial\,\mathbb{V}}\mathrm{d}\,S\,(\boldsymbol{n}\cdot\,\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}\cdot\delta\,\boldsymbol{r}) + o(\delta\,\boldsymbol{r}). \tag{13}$$

بر سطح ِ رسانا، میداان ِ الکتریکی با بردار ِ عمود-بر-سطح موازی ست. پس،

$$(\delta U)_V = -\frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{\partial \mathbb{V}} \mathrm{d}\, S\, (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{n}\cdot\delta\,\boldsymbol{r} + o(\delta\,\boldsymbol{r}), \qquad (14)$$

و از آنجا

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\varepsilon_0}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{n}. \qquad (15)$$

تغییر ِ انرژی یِ الکترُستاتیک را به تغییر ِ ظرفیت هم میشود مربوط کرد. ماتریس ِ ظرفیت را با C نشان میدهم:

$$U = \frac{1}{2}\, C_{i\,j}\, V^i\, V^j. \qquad (16)$$

در این صورت،

$$(\delta\, C_{i\,j})V^i\, V^j = -\varepsilon_0 \oint_{\partial \mathbb{V}} \mathrm{d}\, S\, (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{n}\cdot\delta\,\boldsymbol{r} + o(\delta\,\boldsymbol{r}). \qquad (17)$$

2 روش ِ مستقیم

نیرو-بر-مساحت ِ وارد بر یک چگالی یِ سطحی چنین میشود

$$\boldsymbol{f} = \sigma\, \boldsymbol{E}_{\mathrm{av}}, \qquad (18)$$

که σ چگالی یِ سطحی و $\boldsymbol{E}_{\mathrm{av}}$ میانگین ِ میدان در دُ-سو یِ سطح است. اگر سطح رسانا باشد، میدان درون ِ رسانا صفر است و بیرون ِ رسانا (و بر سطح ِ رسانا)

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\boldsymbol{n}, \qquad (19)$$

که $\boldsymbol{n}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر رسانا به سو یِ درون ِ رسانا ست. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{av}} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\boldsymbol{n}, \qquad (20)$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{f} = -\frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,\sigma^2\,\boldsymbol{n}, \tag{21}$$

که ترکیب َش با (19) هم هم ان (15) است.

3 پانوشتها

[1] John David Jackson; "Classical electrodynamics" 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 4