X1-127 (2017/10/27)

قید- ِ-برابری-ییها یِ ناهُلُنُم و کار ِ شان

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

قید- ِ-ناهُلُنُمها یی بررسی میشوند که به شکل ِ صفر-بودن ِ یک تابع از زمان، مکان، و سرعت َند. کار ِ نیروها یِ متناظر با این قیدها بررسی میشود و شرایط ی برا یِ صفر-شدن ِ این کار به دست میئاید.

0 مسئله

قید چیز ی ست که حرکت را به بخش ی از فضا (یِ پیکربندی یِ گسترش-یافته) محدود میکند. قید ِ هُلُنُم یک تابع از مکان و زمان است. محدودیت ِ متناظر با یک قید ِ هُلُنُم ِ C این است که مکان ِ $\boldsymbol{q}$ باید در هر زمان ِ t این شرط را بر آورَد.

$$C[t, \boldsymbol{q}(t)] = 0. \qquad (1)$$

قید ِ ناهُلُنُم هر محدودیت ی ست که به شکل ِ بالا نباشد: قید ِ ناهُلُنُم ممکن است به شکل ِ یک نابرابری باشد (مثلَن جسم مقید باشد از یک جعبه بیرون نرود). قید ِ ناهُلُنُم ممکن است به شکل ِ یک

برابری باشد که علاوه بر مکان و زمان شامل ِ سرعت هم هست:

$$Z[t, \boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)] = 0. \tag{2}$$

به قید ی که متناظر با صفر-شدن ِ یک تابع است، یک قید ِ برابری یی میگوییم. در ادامه فقط این قیدها را بررسی میکنم.

این که یک قید براورده شود، به تنهایی تعیین نمیکند نیرو یی که قرار است آن قید را براورَد چگونه است. مثلَن وقت ی یک جسم مقید است بر یک سطح حرکت کند، ممکن است نیرو یِ متناظر با این قید عمود بر سطح باشد، یا مئلفه یِ مماس-بر-سطح (اصطکاک) هم داشته باشد. یک راه ِ براوردن ِ یک قید- ِ-برابری یی این است که آن قید- ِ-برابری یی با یک ضریب ِ لَگرانژ [1] به لَگرانژی اضافه شود: متناظر با لَگرانژی یِ L یک لَگرانژی یِ گسترش-یافته تعریف میکنم که آن را با $\tilde{L}$ نشان میدهم، چنان که

$$\tilde{L} = L + \mu\, Z. \tag{3}$$

μ ضریب ِ لَگرانژ [1] است. $\tilde{L}$ علاوه بر $\boldsymbol{q}$ شامل ِ μ هم هست. معادلات ِ حرکت صفر-شدن ِ وردش ِ $\tilde{S}$ (کنش ِ متناظر با $\tilde{L}$) برا یِ زمانها یِ درونی یَند. این شکل ِ اعمال ِ قید یک انتخاب است، که متناظر با شکل ِ خاص ی از نیروها یِ قیدی ست. هدف بررسی یِ نیروها یِ قیدی یِ متناظر با این انتخاب است.

1 معادلات ِ حرکت

چنان که در مثلَن [2] آمده، معادله-یِ-حرکتها یی که از لَگرانژی یِ (3) به دست میئایند چنین اند.

$$\tilde{\mathcal{E}}_i = 0, \tag{4}$$

که

$$\tilde{\mathcal{E}}_i = \frac{\partial\,\tilde{L}}{\partial\,q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial\,\tilde{L}}{\partial\,\dot{q}^i}\right),$$
$$= \mathcal{E}_i + \mathcal{F}_i. \tag{5}$$
$$\mathcal{E}_i = \frac{\partial\,L}{\partial\,q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{q}^i}\right). \tag{6}$$
$$\mathcal{F}_i = \mu\,\frac{\partial\,Z}{\partial\,q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\mu\,\frac{\partial\,Z}{\partial\,\dot{q}^i}\right). \tag{7}$$

$\mathcal{F}$ نیرو یِ قیدی ست. البته یک معادله هم با صفر-گذاشتن ِ وردش ِ $\tilde{L}$ نسبت μ به دست میئاید، که خُد ِ قید است:

$$Z = 0. \tag{8}$$

2 کار ِ نیرو یِ قیدی

کار ِ نیرو یِ قیدی متناظر با جابِجایی یِ $\delta\,\boldsymbol{q}$ را با $\delta\,W$ نشان میدهم:

$$\delta\,W = \mathcal{F}_i\,\delta\,q^i. \tag{9}$$

دیده میشود

$$\delta\,W = \mu\left(\frac{\partial\,Z}{\partial\,q^i}\,\delta\,q^i + \frac{\partial\,Z}{\partial\,\dot{q}^i}\,\delta\,\dot{q}^i\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\mu\,\frac{\partial\,Z}{\partial\,\dot{q}^i}\,\delta\,q^i\right). \tag{10}$$

جابِجایی یِ سازگار با قید (در زمان ِ ثابت) را با $\delta_{\mathrm{v}}\,\boldsymbol{q}$ نشان میدهم:

$$0 = \frac{\partial\,Z}{\partial\,q^i}\,\delta_{\mathrm{v}}\,q^i + \frac{\partial\,Z}{\partial\,\dot{q}^i}\,\delta_{\mathrm{v}}\,\dot{q}^i. \tag{11}$$

کار ِ متناظر با چنین-جابِجایی یی را با $\delta_{\mathrm{v}}\,W$ نشان میدهم و به آن کار ِ سازگار-با-قید یا کار ِ مجازی میگویم. دیده میشود

$$\delta_{\mathrm{v}}\,W = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\mu\,\frac{\partial\,Z}{\partial\,\dot{q}^i}\,\delta_{\mathrm{v}}\,q^i\right). \tag{12}$$

جابِجایی یِ واقعی (یِ سازگار با قید) را با $\delta_{\mathrm{a}}\,\boldsymbol{q}$ نشان میدهم:

$$\delta_{\mathrm{a}}\,q^i = \dot q^i\,\delta\,t. \tag{13}$$

شرط ِ این که q قید را براورَد میشود

$$0 = \frac{\partial\,Z}{\partial\,t} + \frac{\partial\,Z}{\partial\,q^i}\,\dot q^i + \frac{\partial\,Z}{\partial\,\dot q^i}\,\ddot q^i. \tag{14}$$

کار ِ واقعی (کار ِ متناظر با چنین-جابِجایی یی) را با $\delta_{\mathrm{a}}\,W$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\delta_{\mathrm{a}}\,W = -\left[\mu\,\frac{\partial\,Z}{\partial\,t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\mu\,\frac{\partial\,Z}{\partial\,\dot q^i}\,\dot q^i\right)\right]\delta\,t. \tag{15}$$

3 حالتها یِ خاص

3.1 قید ِ هُلُنُم

متناظر با قید- ِ-هُلُنُم ِ C و ضریب- ِ-لَگرانژ [1] ِ λ:

$$\tilde L = L + \lambda\,C, \tag{16}$$

معادلات ِ (7) و (12) و (15)، به ترتیب، میشوند

$$\mathcal{F}_i = \lambda\,\frac{\partial\,C}{\partial\,q^i}. \tag{17}$$

$$\delta_{\mathrm{v}}\,W = 0. \tag{18}$$

$$\delta_{\mathrm{a}}\,W = -\lambda\,\frac{\partial\,C}{\partial\,t}\,\delta t. \tag{19}$$

کار ِ مجازی یِ نیرو یِ قیدی صفر است. کار ِ واقعی یِ نیرو یِ قیدی صفر است، به شرط ی که قید مستقل از زمان باشد.

3.2 قید ِ هم-ارز-هُلُنُم

میگویم قید ِ D هم-ارز-هُلُنُم است، اگر D انتگرال-پذیر باشد، یعنی مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ یک تابع ِ C (از فقط زمان و مکان) باشد:

$$D = \frac{\mathrm{d}\, C}{\mathrm{d}\, t}, \tag{20}$$

که یعنی

$$D(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = D_j(t, \boldsymbol{q})\, \dot{q}^j + D_0(t, \boldsymbol{q}). \tag{21}$$

$$D_j = \frac{\partial\, C}{\partial\, q^j}. \tag{22}$$

$$D_0 = \frac{\partial\, C}{\partial\, t}. \tag{23}$$

متناظر با قید ِ D و ضریب- ِ-لَگرانژ [1] ِ μ:

$$\tilde{L} = L + \mu\, D, \tag{24}$$

دیده میشود

$$\tilde{L} = L - \dot{\mu}\, C + \frac{\mathrm{d}(\mu\, C)}{\mathrm{d}\, t}. \tag{25}$$

به این ترتیب $\tilde{L}$ با لَگرانژی یی متناظر با قید ِ C به جا یِ D هم-ارز است. در واقع با تعریف ِ λ با

$$\lambda = -\dot{\mu}, \tag{26}$$

$\tilde{L}$ در (24) با $\tilde{L}$ در (16) هم-ارز میشود. یک تفاوت ِ ظریف باقی میمانَد، و آن این که قید ی که از (24) به دست میئاید

$$D = 0 \tag{27}$$

است. یعنی

$$\frac{\mathrm{d}\, C}{\mathrm{d}\, t} = 0. \tag{28}$$

این قید دقیقَن (1) نیست، اما همراه با یک شرط- ِ-اولیه (C در یک زمان صفر باشد) با (1) (در همه یِ زمانها) هم-ارز است.

نیرو یِ قیدی یِ متناظر با $\tilde{L}$ در (24) چنین میشود.

$$\mathcal{F}_i = \mu \left(\frac{\partial D_j}{\partial q^i}\, \dot{q}^j + \frac{\partial D_0}{\partial q^i} \right) - \frac{\mathrm{d}(\mu\, D_i)}{\mathrm{d}\, t}. \tag{29}$$

دیده میشود

$$\mathcal{F}_i = \mu \left[\left(\frac{\partial D_j}{\partial q^i} - \frac{\partial D_i}{\partial q^j} \right) \dot{q}^j + \left(\frac{\partial D_0}{\partial q^i} - \frac{\partial D_i}{\partial t} \right) \right] - \dot{\mu}\, D_i. \tag{30}$$

از (22) و (23) نتیجه میشود کروشه صفر است. پس

$$\mathcal{F}_i = -\dot{\mu}\, D_i. \tag{31}$$

با استفاده از (22) و (26)، همراه با این که C به سرعت بستِگی ندارد، معلوم میشود (31) هم ان (17) است. از جمله معلوم میشود (18) و (19) برقرار است: کار ِ مجازی یِ نیرو یِ قیدی صفر است و کار ِ واقعی یِ نیرو یِ قیدی صفر است اگر C مستقل از زمان باشد، یعنی D_0 صفر باشد.

3.3 قید ِ سرعت-آفین

میگویم قید ِ E سرعت-آفین است، اگر بستِگی یِ E به سرعت دست- ِ-بالا خطی باشد. این یعنی مانسته یِ (21) برقرار است:

$$E(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = E_j(t, \boldsymbol{q})\, \dot{q}^j + E_0(t, \boldsymbol{q}), \tag{32}$$

ولی مانستِها یِ (22) و (23) لزومَن برقرار نیستند. $\tilde{L}$ را مشابه با (24) تعریف میکنم:

$$\tilde{L} = L + \mu\, E. \tag{33}$$

مانستِها یِ (29) و (30) نتیجه میشوند. این آخری میشود

$$\mathcal{F}_i = \mu \left[\left(\frac{\partial E_j}{\partial q^i} - \frac{\partial E_i}{\partial q^j} \right) \dot{q}^j + \left(\frac{\partial E_0}{\partial q^i} - \frac{\partial E_i}{\partial t} \right) \right] - \dot{\mu}\, E_i. \tag{34}$$

اما بر خلاف ِ قید ِ هم-ارز-هُلُنُم، کروشه لزومَن صفر نیست، پس مانسته یِ (31) لزومَن نتیجه نمیشود. در واقع شرط ِ لازم و کافی برا یِ صفر-شدن ِ کروشه این است که E مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ یک تابع از زمان و مکان باشد، یعنی مانسته یِ (20) برقرار باشد. البته پرانتز ِ اول در کروشه، نسبت به i و j پادمتقارن است. در نتیجه،

$$\left(\frac{\partial\,E_j}{\partial\,q^i}-\frac{\partial\,E_i}{\partial\,q^j}\right)\dot q^j\,\dot q^i=0. \tag{35}$$

به این ترتیب،

$$\delta_{\rm a}\,W=\left[\mu\left(\frac{\partial\,E_0}{\partial\,q^i}-\frac{\partial\,E_i}{\partial\,t}\right)\dot{}q^i-\dot\mu\,E_i\,\dot{}q^i\right]\delta\,t. \tag{36}$$

با اعمال ِ قید در جمله یِ آخر ِ درون ِ کروشه،

$$\delta_{\rm a}\,W=\left[\mu\left(\frac{\partial\,E_0}{\partial\,q^i}-\frac{\partial\,E_i}{\partial\,t}\right)\dot{}q^i+\dot\mu\,E_0\right]\delta\,t. \tag{37}$$

دیده میشود اگر E_0 صفر باشد و E_i ها مستقل از زمان باشند، کار ِ واقعی یِ نیرو یِ قیدی صفر است.

4 پانوشتها

[1] Lagrange

[2] Herbert Goldstein, Charles Poole, & John Safko; “Classical mechanics” 3rd edition (Addison Wesley, 2002) chapter 2