X1-129 (2018/01/26)

مسئله یِ وارون برا یِ نیرو یِ مرکزی

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

مسئله یِ محاسبه یِ نیرو یِ مرکزی بر اساس ِ دادِها یی در باره یِ مدار بررسی میشود. نیرو برا یِ چند مثال به دست میئاید.

1 مسئله یِ نیرو یِ مرکزی

در این متن منظور از مسئله یِ نیرو یِ مرکزی مسئله یِ حرکت ِ یک ذره است که در اثر ِ نیرو یی ست که تابع ِ فقط مکان است، و برابر است با عدد ی تابع ِ فقط فاصله از یک نقطه یِ ثابت (مبدئ) ضرب در بردار ِ مکان (نسبت به مبدئ). نیرو تقسیم بر جرم را با $\boldsymbol{f}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{n}\, f(r), \tag{1}$$

که r فاصله از مبدئ و $\boldsymbol{n}$ بردار ِ یکه یِ شعاعی (بردار ِ یکه یِ هم-جهت با مکان، $\boldsymbol{r}$) است:

$$\boldsymbol{r} = r\, \boldsymbol{n}. \tag{2}$$

رُشن است که متناظر با چنین نیرو یی یک انرژی یِ پتانسیل هست که تابع ِ فقط r است. انرژی-یِ-پتانسیل تقسیم بر جرم را با v نشان میدهم:

$$f = -\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,r}. \tag{3}$$

تکانه یِ زاویئی یِ ذره ای که تحت ِ یک نیرو یِ مرکزی حرکت میکند پایسته است. از این نتیجه میشود مدار ِ ذره مسطح است (و صفحه یِ شامل ِ مدار مبدئ را در بر دارد). مختصات ِ قطبی در آن صفحه را با (r, ϕ) نشان میدهم. تکانه یِ زاویئی تقسیم بر جرم را با ℓ نشان میدهم:

$$\ell = r^2\,\dot{\phi}, \tag{4}$$

که $\dot{\mathfrak{X}}$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به t (زمان) است.

انرژی یِ ذره ای که تحت ِ یک نیرو یِ مرکزی حرکت میکند هم پایسته است. انرژی تقسیم بر جرم را با e نشان میدهم. انرژی شامل ِ بخشها یِ جنبشی و پتانسیل است:

$$e = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\,\dot{\phi}^2}{2} + v, \tag{5}$$

یا، با استفاده از (4)،

$$e = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2\,r^2} + v. \tag{6}$$

این، با استفاده از (4) میشود

$$e = \frac{\ell^2\,r'^2}{2\,r^2} + \frac{\ell^2}{2\,r^2} + v, \tag{7}$$

که $\mathfrak{X}'$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به ϕ است. با تغییر- ِ-متغیر ِ

$$u = \frac{1}{r}, \tag{8}$$

معادله یِ (7) میشود

$$e = \frac{\ell^2}{2}(u'^2 + u^2) + v, \tag{9}$$

یا، با مشتق-گیری نسبت به ϕ و استفاده از (3)،

$$0 = \ell^2(u'' + u) + \frac{f}{u^2}. \tag{10}$$

از (4) ضمنَن دیده میشود T (دُره یِ مدار، وقت ی مدار بسته است) چنین است.

$$T = \frac{2\,S}{\ell}, \tag{11}$$

که S مساحت ی ست که خط ِ واصل ِ مرکز- ِ-نیرو به ذره طی ِ یک دُره میروبد. اینها را میشود در مثلَن [1] یافت.

2 محاسبه یِ نیرو از رو یِ مدار

روابط ِ (9) یا (10) را میشود برا یِ محاسبه یِ شکل ِ مدار به کار برد. با انتگرال-گیری از (9)، عبارت ی برا یِ ϕ بر حسب ِ u (یا r) به دست میئاید:

$$\phi = \int \mathrm{d}\,u \left\{ \pm \left[\frac{2}{\ell^2}(e - v)\right]^{-1/2} \right\}. \tag{12}$$

طرف ِ راست یک انتگرال ِ نامعین است. پس شامل ِ یک ثابت ِ جمعی (مثلَن ϕ_0) است. به این ترتیب، در مسئله یِ نیرو-یِ-مرکزی مدار با پنج پارامتر تعیین میشود. سه تا سمت-گیری یِ مدار را تعیین میکنند. از اینها دُ تا متناظر با جهت ِ تکانه یِ زاویئی یَند و بردار ِ عمود بر صفحه یِ مدار را مشخص میکنند (صفحه از مرکز ِ نیرو میگذرد). سومی (ثابت ِ جمعی نسبت به زاویه) سمت-گیری یِ مدار در صفحه را مشخص میکند. شکل ِ مدار با فقط دُ پارامتر (ℓ و e) تعیین میشود.

مسئله یِ وارون محاسبه یِ نیرو (یا انرژی-یِ-پتانسیل) از رو یِ شکل ِ مدار است. (10) را میشود چنین نوشت.

$$\frac{u''}{u} + 1 = -\frac{1}{\ell^2}\,\frac{f}{u^3}. \tag{13}$$

البته قرار است f مستقل از ϕ باشد و به ℓ و e هم بستِگی نداشته باشد. به این ترتیب، با داشتن ِ رابطه یِ بین ِ u و ϕ مشتق ِ دوم ِ u نسبت به ϕ محاسبه میشود و در حاصل ϕ بر حسب ِ u جاگذاری میشود:

$$\frac{u''}{u} + 1 =: g(u, \xi), \tag{14}$$

که ξ متناظر با پارامترها یی ست که شکلِ مدار را تعیین میکنند. این که f مستقل از ℓ و e باشد یک قید بر g میگذارد. با

$$\frac{1}{g}\,\frac{\partial\, g}{\partial\, u} =: h, \tag{15}$$

دیده میشود h باید مستقل از ℓ و e باشد. با فرضِ این که چنین باشد،

$$f = -\ell^2\, u^3\, g. \tag{16}$$

3 مثالها

3.1 یک مقطعِ مخروطی که یک کانون َش در مبدئ است

معادله یِ چنین-مدار ی میشود

$$u = \alpha + \beta\, \cos(\phi - \phi_0), \tag{17}$$

که α و β و ϕ_0 ثابت َند و β نامنفی ست. ϕ_0 بر شکلِ مدار اثر ی ندارد. دیده میشود

$$g = \frac{\alpha}{u}. \tag{18}$$

$$h = -\frac{1}{u}. \tag{19}$$

رُشن است که h مستقل از ℓ و e است. از (16) هم نتیجه میشود

$$f = -\ell^2\, \alpha\, u^2, \tag{20}$$

که با تعریفِ

$$\ell^2\, \alpha =: k, \tag{21}$$

میشود

$$f = -\frac{k}{r^2}. \tag{22}$$

نیرو عکس- ِ-مجذور- ِ-فاصله است. اگر α مثبت (منفی) باشد، نیرو جاذبه (دافعه) است. اگر α بزرگتر از β باشد، که در این صورت α مثبت است و نیرو جاذبه است، مدار بیضی ست. نیم-قطرها یِ بزرگ و کوچک ِ بیضی را با، به ترتیب، a و b نشان میدهم. دیده میشود

$$\alpha = \frac{a}{b^2}. \tag{23}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2}. \tag{24}$$

از (11) نتیجه میشود

$$T = \frac{2\,\pi\,a\,b}{\ell}. \tag{25}$$

با استفاده از این و (21)،

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2\,a^2\,b^2\,\alpha}{k}, \tag{26}$$

که با استفاده از (23) میشود

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{k}\,a^3. \tag{27}$$

این قانون ِ سوم ِ کِپلِر [2] است: مجذور ِ دُره با مکعب ِ قطر ِ بزرگ متناسب است.

3.2 بیضی یی که مرکز َش در مبدئ است

معادله یِ چنین مدار ی میشود

$$u^2 = \frac{\cos^2(\phi - \phi_0)}{b^2} + \frac{\sin^2(\phi - \phi_0)}{a^2}, \tag{28}$$

که a و b نیم-قطرها یِ بزرگ و کوچک ِ بیضی یَند و و ϕ_0 ثابت است (و البته بر شکل ِ مدار اثر ی ندارد). دیده میشود

$$g = \frac{1}{a^2\,b^2\,u^4}. \tag{29}$$

$$h = -\frac{4}{u}. \tag{30}$$

رُشن است که h مستقل از ℓ و e است. از (16) هم نتیجه میشود

$$f = -\frac{\ell^2}{a^2\, b^2\, u}, \tag{31}$$

که با تعریفِ

$$\frac{\ell}{a\, b} =: \omega, \tag{32}$$

میشود

$$f = -\omega^2\, r. \tag{33}$$

نیرو جاذبه و متناسب با فاصله است، یعنی نیرو یِ نوسانگر- ِ-هماهنگ است. از (11) باز هم رابطه یِ (25) نتیجه میشود، که با استفاده از آن و (32)،

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}. \tag{34}$$

دُره یِ مدار ثابت است، چنان که از نوسانگرِ هماهنگ انتظار میرود.

3.3 دایره ای که مرکز َش در مبدئ نیست

معادله یِ چنین مدار ی میشود

$$\cos(\phi - \phi_0) = \frac{1}{2\, S\, u} - \frac{R^2 - S^2}{2\, S}\, u, \tag{35}$$

که R شعاعِ دایره و S فاصله یِ مرکزِ دایره تا مبدئ است، و ϕ_0 ثابت است (و البته بر شکلِ مدار اثر ی ندارد). دیده میشود

$$g = \frac{8\, R^2\, u^2}{[1 + (R^2 - S^2) u^2]^3}. \tag{36}$$

$$h = \frac{2}{u} - \frac{6(R^2 - S^2) u}{1 + (R^2 - S^2) u^2}. \tag{37}$$

شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که h مستقل از ℓ و e باشد این است که $(R^2 - S^2)$ مستقل از ℓ و e باشد. با این فرض که چنین است، از (16) نتیجه میشود

$$f = -\frac{8\,\ell^2\,R^2\,u^5}{[1+(R^2-S^2)u^2]^3}, \tag{38}$$

که با تعریفها یِ

$$8\,\ell^2\,R^2 =: \gamma, \tag{39}$$

$$R^2 - S^2 =: \mu, \tag{40}$$

میشود

$$f = -\frac{\gamma\,r}{(r^2+\mu)^3}. \tag{41}$$

در مثالها یِ قبلی، مدار جز ϕ_0 دُ پارامتر ِ آزاد داشت. قبلَن هم دیده شد که در مسئله یِ نیرو-یِ-مرکزی (با نیرو یِ معین) شکل ِ مدار با دُ پارامتر تعیین میشود. اما در مثال ِ بالا جز ϕ_0 فقط یک پارامتر ِ آزاد هست، چون $(R^2 - S^2)$ ثابت است. از این بر میئاید همه یِ مدارها یِ متناظر با نیرو یی به شکل ِ (41) دایره نیستند. پس مدارها یِ دایرِئی متناظر با یک قید بر پارامترها یِ ℓ و e یَند (که شکل ِ مدار را تعیین میکنند). از (41) دیده میشود

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\gamma}{4(r^2+\mu)^2}, \\ &= -\frac{\gamma\,u^4}{4(1+\mu\,u^2)^2}, \end{aligned} \tag{42}$$

که انتخاب شده انرژی یِ پتانسیل در بینهایت صفر شود. از (35) دیده میشود

$$u^2 + u'^2 = \frac{4\,R^2\,u^4}{(1+\mu\,u^2)^2}. \tag{43}$$

به این ترتیب (9) نتیجه میدهد

$$e = 0. \tag{44}$$

فقط این مقدار ِ انرژی ست که مدارها ِ متناطر با آن دایره اند. انتظار هم نمیرفت نیرو یِ مرکزی یی باشد که همه یِ مدارها یِ متناظر با آن دایره باشند. بر اساس ُ قضیه یِ برتران [3]، (مثلَن [1]) نیرو-یِ-مرکزیها یی که همه یِ مدارها یِ مقید ِ متناظر با آنها بسته اند فقط دُ تا یَند: نیرو یِ جاذبه یِ متناسب با r^{-2} و نیرو یِ جاذبه یِ متناسب با r^1، که هم ان دُ-مثال ِ اول بودند. مدارها یِ مقید ِ متناظر با آن دُ-نیرو هم در حالت ِ کلی بیضی یَند و لزومَن دایره نیستند.

4 پانوشتها

[1] Herbert Goldstein, Charles Poole, & John Safko; "Classical mechanics" 3rd edition (Addison Wesley, 2002) chapter 3

[2] Kepler

[3] Bertrand