X1-130 (2018/02/25)

بسامدِ حرکتِ عمودی یِ یک جسمِ شناور

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

بسامدِ نوسانِ عمودی یِ یک جسمِ شناور بر سطحِ یک شاره، با در-نظر-گرفتنِ حرکتِ شاره، محاسبه می‌شود.

0 درامد

یک جسم با جرم-ِ-حجمی یِ (میانگینِ) ϱ' بر سطحِ یک شاره با جرم-ِ-حجمی یِ ϱ شناور می‌مانَد، به شرط ی که ϱ' از ϱ کمتر باشد. نیروها یِ وارد بر جسم W' (وزن) و F (نیرو یِ ارشمیدس) اَند. W' به وضعیتِ جسم بستِگی ندارد و

$$F = \varrho\, g\, V, \tag{1}$$

که V حجم ی از جسم است که درونِ شاره است. در حالتِ تعادل، F با W' برابر است. جا-به-جایی یِ جسم به بالا نسبت به حالتِ تعادل را با ζ نشان می‌دهم. اگر جسم نسبت به حالتِ تعادل پایین‌تر (بالاتر) برود، یعنی ζ منفی (مثبت) شود، F زیاد (کم) می‌شود و برایندِ نیروها یِ وارد بر جسم به بالا (پایین) می‌شود. در نتیجه جسم به سو یِ حالتِ تعادل رانده می‌شود. این نشان می‌دهد تعادلِ

جسم، برا یِ جا-به-جاییها یِ عمودی، پایدار است.

هدف محاسبه یِ بسامدِ نوسانها یِ عمودی یِ کوچک است. یک راهِ این کار، محاسبه یِ انرژی یِ پتانسیل بر حسبِ جا-به-جایی یِ عمودی یِ جسم، و انرژی یِ جنبشی بر حسبِ سرعتِ جا-به-جایی یِ عمودی یِ جسم است. اولی نسبتًا سرراست است. نکته یِ نابدیهی برا یِ دومی این است که وقت ی جسم جا-به-جا میشود، شاره هم جا-به-جا میشود و در محاسبه یِ انرژی یِ جنبشی یِ کل باید انرژی یِ جنبشی یِ شاره را هم حساب کرد.

1 انرژی یِ پتانسیل

مقطع ی از جسم که در حالتِ تعادل با سطحِ آزادِ شاره هم-ارتفاع است را با $\mathbb{A}$، و مساحتِ این مقطع را با A نشان میدهم. $\mathbb{A}$ تصویرِ سطحِ تماسِ جسم با شاره بر یک صفحه یِ افقی ست. مساحتِ مقطعها یِ افقی یِ ظرفِ شاره را با S نشان میدهم. (ظرف را استوانه ای گرفته ام که محورَ ش قائم است. در نتیجه S مستقل از ارتفاع است.) محورِ z را عمودی و رو-به-بالا، و $(z = 0)$ را سطحِ آزادِ شاره میگیرم. ارتفاعِ هر نقطه یِ تماسِ جسم با شاره در تعادل را با z_0 نشان میدهم. دیده میشود

$$V = -\int_{\mathbb{A}} \mathrm{d}\, A\, z_0(\boldsymbol{\rho}), \tag{2}$$

که $\boldsymbol{\rho}$ مکان در $\mathbb{A}$ است. تغییرِ کمیتها یِ مختلف به خاطرِ جا-به-جایی یِ جسم را تا اولین مرتبه یِ ناصفر نسبت به جا-به-جایی حساب میکنم.

وقت ی جسم به اندازه یِ ζ بالا میرود، سطحِ آزادِ شاره هم به اندازه یِ σ بالا میرود. به خاطرِ جا-به-جایی یِ جسم، حجمِ بخش ی از جسم که درونِ شاره است تغییر میکند. این تغییر را با $\delta\, V$ نشان میدهم. به خاطرِ جا-به-جایی یِ جسم، ناحیه ای با $\boldsymbol{\rho}$ در $\mathbb{A}$ و ارتفاعِ بینِ $z_0(\boldsymbol{\rho})$ و $[z_0(\boldsymbol{\rho})+\zeta]$ پر از شاره میشود. حجمِ این شاره $(-\delta\, V)$ است. انرژی-یِ-پتانسیلِ این شاره یِ اضافی را با $\delta_1\, U$ نشان میدهم. قرینه یِ حجم ی که اینجا اضافه شده به استوانه ای اضافه میشود که مساحتِ مقطعَ ش $(S - A)$ است و ارتفاعَ ش بینِ 0 و σ است. انرژی-یِ-پتانسیلِ این شاره یِ اضافی را با $\delta_2\, U$ نشان میدهم. سرانجام، جا-به-جایی یِ جسم انرژی-یِ-پتانسیلِ آن را به اندازه یِ $\delta_0\, U$ تغییر میدهد. تغییرِ کلِ انرژی یِ پتانسیل را با $\delta\, U$ نشان میدهم.

دیده میشود

$$\delta V = -A\,\zeta. \tag{3}$$

$$\delta V = (S-A)\sigma. \tag{4}$$

$$\delta_1 U = \varrho\, g\, \zeta \int_{\mathbb{A}} \mathrm{d}\,A\, \left[z_0(\boldsymbol{\rho}) + \frac{\zeta}{2}\right]. \tag{5}$$

$$\delta_2 U = \varrho\, g (\delta\, V)\,\frac{\sigma}{2}. \tag{6}$$

$$\delta_0 U = W'\,\zeta. \tag{7}$$

$$\delta U = \delta_0 U + \delta_1 U + \delta_2 U. \tag{8}$$

با استفاده از (3) و (4) نتیجه میشود

$$\sigma = -\alpha\,\zeta, \tag{9}$$

که

$$\alpha = \frac{A}{S-A}. \tag{10}$$

به این ترتیب،

$$\delta U = \frac{k}{2}\,\zeta^2, \tag{11}$$

که

$$k = (1+\alpha)\varrho\, g\, A. \tag{12}$$

یک حالت ِ ساده وقت ی ست که S خیل ی بزرگتر از A باشد. در این حالت (9) و (11) به این شکل ساده میشوند.

$$\alpha = 0, \qquad S \gg A. \tag{13}$$

$$k = \varrho\, g\, A, \qquad S \gg A. \tag{14}$$

2 انرژی ی ِ جنبشی

یک توده ی ِ شاره را میگیرم که معادله ی ِ سطح ِ (متحرک ِ) آن چنین است.

$$f(t, \boldsymbol{r}) = 0. \tag{15}$$

با مشتق-گیری از این معادله نتیجه میشود

$$\dot{f}(t, \boldsymbol{r}) + [(\boldsymbol{\nabla} f)(t, \boldsymbol{r})] \cdot [\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r})] = 0, \quad (t, \boldsymbol{r}) \in \mathbb{B} \tag{16}$$

که $\dot{f}$ و $(\boldsymbol{\nabla} f)$ مشتقها ی f نسبت به، به ترتیب، t و $\boldsymbol{r}$ اند، $\boldsymbol{v}$ سرعت ِ ذرات ِ شاره است، و $\mathbb{B}$ سطح ِ شاره است، یعنی t و $\boldsymbol{r}$ در (16) رابطه ی (15) را بر میئاورند. بردار ِ یکه ی ِ عمود بر سطح ِ شاره را با $\boldsymbol{n}$ نشان میدهم. این بردار با $(\boldsymbol{\nabla} f)$ موازی ست. به این ترتیب (16) را میشود چنین نوشت.

$$\frac{\dot{f}(t, \boldsymbol{r})}{[\boldsymbol{n}(t, \boldsymbol{r})] \cdot [(\boldsymbol{\nabla} f)(t, \boldsymbol{r})]} + [\boldsymbol{n}(t, \boldsymbol{r})] \cdot [\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r})] = 0, \quad (t, \boldsymbol{r}) \in \mathbb{B}. \tag{17}$$

این یک شرط ِ مرزی برا ی ِ معادله ی ِ سرعت است. با فرض ِ این که شاره تراکم-ناپذیر است،

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) = 0. \tag{18}$$

با فرض ِ این که جریان نا-چرخشی ست:

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = 0, \tag{19}$$

پس یک اسکالر ِ ψ هست که

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\, \psi. \tag{20}$$

به ψ پتانسیل ِ سرعت میگویند. (17) و (18)، به ترتیب، میشوند

$$\frac{\dot{f}(t, \boldsymbol{r})}{[\boldsymbol{n}(t, \boldsymbol{r})] \cdot [(\boldsymbol{\nabla} f)(t, \boldsymbol{r})]} + [\boldsymbol{n}(t, \boldsymbol{r})] \cdot [(\boldsymbol{\nabla}\, \psi)(t, \boldsymbol{r})] = 0, \quad (t, \boldsymbol{r}) \in \mathbb{B}. \tag{21}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, \psi)(t, \boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{W}(t), \tag{22}$$

که $\mathbb{W}$ ناحیه ای ست که شاره اشغال کرده. سطح ِ شاره تابع ِ زمان است و در نتیجه $\mathbb{W}$ هم تابع ِ زمان است. در نتیجه مسئله ی ِ متناظر با معادلات ِ بالا یک مسئله ی ِ شرط- ِ-مرزی با ناحیه ای تابع ِ زمان است. این مسئله تا مرتبه ی ِ یک نسبت به سرعت سادتر میشود. در این حالت (21) و (22)، به ترتیب، میشوند

$$\frac{\dot{f}(t,\boldsymbol{r})}{[\boldsymbol{n}_0(\boldsymbol{r})]\cdot[(\boldsymbol{\nabla} f)(t,\boldsymbol{r})]}+[\boldsymbol{n}_0(\boldsymbol{r})]\cdot[(\boldsymbol{\nabla}\,\psi)(t,\boldsymbol{r})]=0,\qquad \boldsymbol{r}\in(\partial\,\mathbb{W}_0),\quad (23)$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\psi)(t,\boldsymbol{r})=0,\qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{W}_0,\qquad (24)$$

که $\mathbb{W}_0$ ناحیه ای ست که در حالت ِ تعادل با شاره اشغال شده، $(\partial\,\mathbb{W}_0)$ مرز ِ $\mathbb{W}_0$ است (سطح ِ شاره در حالت ِ تعادل است)، و $\boldsymbol{n}_0$ بردار ِ یکه ی ِ عمود بر سطح ِ شاره در حالت ِ تعادل است. این یک مسئله با شرط ِ مرزی ی ِ نُیمان [1] برا ی ِ ψ است.

متناظر با جا-به-جاییها ی ِ عمودی ی ِ جسم بر شاره،

$$f(t,\boldsymbol{r})=z-\zeta(t)-F(\boldsymbol{\rho}),\qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{S}_1,\qquad (25)$$

$$f(t,\boldsymbol{r})=z-\sigma(t),\qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{S}_2,\qquad (26)$$

که $\mathbb{S}_1$ بخش ی از سطح ِ شاره است که در تماس با جسم است، و $\mathbb{S}_2$ سطح ِ آزاد ِ شاره است (که در تماس با جسم نیست. به این ترتیب (23) میشود

$$[\boldsymbol{n}_0(\boldsymbol{r})]\cdot[(\boldsymbol{\nabla}\,\psi)(t,\boldsymbol{r})]=\frac{\dot{\zeta}}{\sqrt{1+|(\boldsymbol{\nabla}\,F))(\boldsymbol{\rho})|^2}},\qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{S}_1,\qquad (27)$$

$$\hat{\boldsymbol{z}}\cdot[(\boldsymbol{\nabla}\,\psi)(t,\boldsymbol{r})]=-\alpha\,\dot{\zeta},\qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{S}_2,\qquad (28)$$

اگر S خیل ی بزرگتر از A باشد، مسئله باز هم سادتر میشود. در این حالت ارتفاع ِ بخش ی از سطح ِ شاره که در تماس با جسم نیست ثابت میمانَد. در نتیجه طرف ِ راست ِ (28) صفر میشود:

$$\hat{\boldsymbol{z}}\cdot[(\boldsymbol{\nabla}\,\psi)(t,\boldsymbol{r})]=0\qquad (S\gg A)\wedge(\boldsymbol{r}\in\mathbb{S}_2).\qquad (29)$$

روابط ِ (24) و (27)، و (28) یا در حالت ِ سادتر (29)، (البته همراه با این که بر سطح ِ ظرف ِ شاره مشتق ِ عمودی ی ِ ψ صفر است) اصولَن سرعت درون ِ شاره را مشخص میکنند. سرعت و پتانسیل ِ آن

در شاره با $\dot\psi$ متناسب میشوند:

$$\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{r}) = \dot\zeta\,\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{W}_0. \tag{30}$$

$$\psi(t,\boldsymbol{r}) = \dot\zeta\,\chi(t,\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{W}_0. \tag{31}$$

$\boldsymbol{u}$ و χ مستقل از $\dot\zeta$ یَند، و

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\,\chi. \tag{32}$$

در نتیجه K (انرژی یِ جنبشی) چنین میشود

$$K = \frac{m}{2}\,\dot\zeta^2, \tag{33}$$

که

$$m = (1+\beta)\varrho\,V. \tag{34}$$

$(\varrho\,V)$ جرم ِ جسم و $(\beta\,\varrho\,V)$ جرم ِ مئثر ِ شاره است، و

$$\beta = \frac{1}{V}\int_{\mathbb{W}_0}\mathrm{d}\,V\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}, \tag{35}$$

یا

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{V}\int_{\mathbb{W}_0}\mathrm{d}\,V\,(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\,\chi),\\ &= \frac{1}{V}\int_{\mathbb{W}_0}\mathrm{d}\,V\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\chi\,\boldsymbol{\nabla}\,\chi),\end{aligned} \tag{36}$$

که نتیجه میدهد

$$\beta = \frac{1}{V}\left\{\int_{\mathbb{S}_1}\mathrm{d}\,A\,\frac{\chi}{\sqrt{1+|(\boldsymbol{\nabla}\,F)(\boldsymbol{\rho})|^2}} - \alpha\int_{\mathbb{S}_2}\mathrm{d}\,A\,\chi\right\}. \tag{37}$$

اگر S خیل ی بزرگتر از A باشد، جمله یِ دوم صفر میشود:

$$\beta = \frac{1}{V}\int_{\mathbb{S}_1}\mathrm{d}\,A\,\frac{\chi}{\sqrt{1+|(\boldsymbol{\nabla}\,F)(\boldsymbol{\rho})|^2}}, \qquad S\gg A. \tag{38}$$

مثال: یک گوی بر یک شاره شناور است، چنان که در تعادل نیم ی از گوی زیرِ سطحِ آزادِ شاره است. همه یِ ابعادِ ظرف بسیار بزرگتر از شعاعِ گوی َند.

شعاعِ گوی را با R نشان میدهم. مبدئ را بر مرکزِ گوی میگیرم. دیده میشود

$$F(\boldsymbol{\rho}) = -\sqrt{R^2 - \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}. \tag{39}$$

$$V = \frac{2\,\pi\,R^3}{3}, \tag{40}$$

بر حسبِ مختصاتِ کروی، (r, θ, ϕ)،

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |(\boldsymbol{\nabla}\,F)(\boldsymbol{\rho})|^2}} = -\cos\theta, \qquad (r = R)\wedge(\cos\theta < 0). \tag{41}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\chi = 0, \qquad (r > R)\wedge(\cos\theta < 0). \tag{42}$$

$$\frac{\partial\,\chi}{\partial\,r} = \cos\theta, \qquad (r = R)\wedge(\cos\theta < 0). \tag{43}$$

$$\frac{\partial\,\chi}{\partial\,\theta} = 0, \qquad (r > R)\wedge(\cos\theta = 0). \tag{44}$$

دوران حُلِ محورِ z تقارنِ مسئله است. پس پتانسیلِ سرعت مستقل از ϕ است. جوابِ کلی یِ (42) و (44) میشود

$$\chi = R\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{R}{r}\right)^{2\,k+1} \mathrm{P}_{2\,k}(\cos\theta), \tag{45}$$

که P_l چندجملِئی یِ لُژاندر [2] از مرتبه یِ l است و a_k ها ثابت َند. (43) میشود

$$-\cos\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(2\,k+1)a_k\,\mathrm{P}_{2\,k}(\cos\theta), \qquad \cos\theta < 0. \tag{46}$$

با استفاده از

$$\frac{\delta_{k\,n}}{4\,n+1} = \int_{-1}^{0}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{P}_{2\,k}(x)\,\mathrm{P}_{2\,n}(x), \tag{47}$$

نتیجه میشود

$$\frac{2\,k+1}{4\,k+1}\,a_k = -\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\,x\,x\,\mathrm{P}_{2\,k}(x). \tag{48}$$

از اینجا،

$$a_k = -\frac{4\,k+1}{2\,k+1}\,\frac{(-1)^k\,(2\,k)!}{2^{2\,k+1}(2\,k-1)\,k!\,(k+1)!}. \tag{49}$$

رابطه یِ (38) هم میشود

$$\begin{aligned}\beta &= -\frac{2\,\pi\,R^3}{V}\,\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\,x\,x\,\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,\mathrm{P}_{2\,k}(x)\right],\\ &= 3\,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\,k+1}{4\,k+1}a_k^2,\\ &= 3\,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4\,k+1}{2\,k+1}\,\left[\frac{(2\,k)!}{2^{2\,k+1}(2\,k-1)\,k!\,(k+1)!}\right]^2,\end{aligned} \tag{50}$$

که نتیجه میدهد

$$\beta = 0.831. \tag{51}$$

3 بسامد ِ نوسانها یِ کوچک

بسامد ِ زاویئی یِ نوسانها یِ عمودی یِ کوچک را با ω نشان میدهم. از (11) و (33) دیده میشود

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{52}$$

این هم، با استفاده از (12) و (34) میشود

$$\omega^2 = \frac{1+\alpha}{1+\beta}\,\frac{g\,A}{V}. \tag{53}$$

برا یِ مثال ِ بخش ِ پیش، α صفر است و

$$A = \pi\,R^2. \tag{54}$$

V و β هم در، به ترتیب، (40) و (51) آمده اند. به این ترتیب،

$$\omega^2 = 0.819\,\frac{g}{R}. \tag{55}$$

4 پانوشتها

[1] Neumann

[2] Legendre