X1-132 (2018/05/30)

حرکت ِ مرز ِ بین ِ دُ فاز

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

سیستم ی بررسی میشود که شامل ِ چند فاز است. به خاطر ِ رسانش ِ گرمایی، دما تابع ِ زمان است و مرزها یِ بین ِ فازها هم حرکت میکنند. معادلات ِ تحول ِ دما و مرزها به دست میائید، و برا یِ چند مثال ِ ساده حل میشود.

1 تحول ِ دما

رابطه یِ چگالی یِ جریان ِ رسانشی یِ گرما با دما چنین است.

$$\boldsymbol{J} = -K\,\boldsymbol{\nabla}\,T, \tag{1}$$

که $\boldsymbol{J}$ چگالی یِ جریان ِ رسانشی، T دما، و K رسانندِگی ست. جریان ِ گرما یی که از سطح ِ $\mathbb{S}$ میگذرد را با $I(\mathbb{S})$ نشان میدهم:

$$I(\mathbb{S}) = \int_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\,\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J}. \tag{2}$$

اگر $\mathbb{S}$ مرز ِ $\mathbb{V}$ باشد، (و عمود بر $\mathbb{S}$ در هر نقطه به بیرون ِ $\mathbb{V}$ انتخاب شود)، $I(\mathbb{S})$ آهنگ ِ خروج ِ گرما از $\mathbb{V}$ است. به این ترتیب،

$$I(\partial\,\mathbb{V}) = -\int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\,V\,C\,\dot{T}. \tag{3}$$

مرز ِ $\mathbb{V}$ با $\partial\,\mathbb{V}$ نشان داده شده، و C ظرفیت ِ گرمایی بر حجم و $\dot{\mathfrak{X}}$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به t (زمان) است. از کار ِ ماکرُسکپی (مثلَن به خاطر ِ انبساط یا انقباض) چشم پوشیده شده. نتیجه میشود

$$\oint_{\partial\,\mathbb{V}} \mathrm{d}\,\boldsymbol{S}\cdot\,K\,\boldsymbol{\nabla}\,T = \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\,V\,C\,\dot{T}, \tag{4}$$

که با استفاده از قضیه یِ دیورژانس میشود

$$C\,\dot{T} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(K\,\boldsymbol{\nabla}\,T). \tag{5}$$

2 حرکت ِ مرز

گیرم دُ ناحیه هر کدام پر از ماده در یک فاز َند. برا یِ یک لایه یِ نازک شامل ِ $\mathbb{S}$ (بخش ی از مرز ِ مشترک ِ این دُ-ناحیه) جریان ِ گرما به بیرون را مینویسم:

$$I = \int_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\,S\,\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{J}_{+} - \boldsymbol{J}_{-}) + O(\ell). \tag{6}$$

$\boldsymbol{n}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر سطح و ℓ کلفتی یِ لایه است، و

$$\boldsymbol{J}_{\pm}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0^{+}} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}\pm\varepsilon\,\boldsymbol{n}),\quad \boldsymbol{r}\in\mathbb{S}. \tag{7}$$

این جریان- ِ-گرما برابر با آهنگ ِ کاهش ِ انرژی یِ سیستم است، که ناشی از تغییر ِ دما و گذار- ِ-فاز است. اولی $O(\ell)$ است. دومی با سرعت ِ حرکت ِ مرز متناسب است. به این ترتیب،

$$I = \int_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\,S\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,L + O(\ell). \tag{8}$$

$\boldsymbol{v}$ سرعتِ مرز، و L گرما-یِ-نهان-بر-حجمِ گذار-ِ-فاز است. وقت یِ $\boldsymbol{n}$ به سو یِ ناحیه یِ متناظر با فازِ $\mathfrak{p}$ است، L گرما-یِ-نهان-بر-حجمِ تُلیدِ فازِ $\mathfrak{p}$ است. اینجا هم از کارِ ماکرُسکپی و اختلافِ حجم-ِ-ویژه یِ فازها چشم پوشیده شده. از (6) و (8) نتیجه میشود بر مرز

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,L = \boldsymbol{J}_{+} - \boldsymbol{J}_{-}, \tag{9}$$

یا

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,L = -(K\,\boldsymbol{\nabla}\,T)_{+} + (K\,\boldsymbol{\nabla}\,T)_{-}. \tag{10}$$

مئلفه یِ مماسی یِ $\boldsymbol{v}$ مرز را جا-به-جا نمیکند و مشاهده-پذیر نیست. پس میشود مئلفه یِ مماسی یِ $\boldsymbol{v}$ را صفر انتخاب کرد. به این ترتیب، اگر $\boldsymbol{r}$ بر مرز باشد،

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{n}}{L}[-(K\,\boldsymbol{\nabla}\,T)_{+} + (K\,\boldsymbol{\nabla}\,T)_{-}]. \tag{11}$$

3 دستگاهِ معادلات

رابطِها یِ (5) و (11) معادلات یِ جفت-شده برا یِ تحولِ دما و مرز َند. اینها را باید با این ترکیب کرد که دما بر مرز ثابت است (دما یِ گذار است). ناحیه ای که پر از ماده در فازِ i است را با $\mathbb{V}_i$، و مرزِ $\mathbb{V}_i$ با $\mathbb{V}_j$ را با $\mathbb{S}_{i\,j}$ نشان میدهم. K_i و C_i، به ترتیب، رسانندگی و ظرفیت-ِ-گرمایی-بر-حجم در فازِ i اند. $\boldsymbol{n}_{i\,j}$ بردارِ یکه یِ عمود بر $\mathbb{S}_{i\,j}$ به سو یِ $\mathbb{V}_j$، و $L_{i\,j}$ گرما-یِ-نهان-بر-حجمِ گذارِ فازِ i به j است. $T_{i\,j}$ هم دما یِ گذارِ فازِ i به j است. معادلات میشوند

$$C_i\,\dot{T} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(K_i\,\boldsymbol{\nabla}\,T), \qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{V}_i. \tag{12}$$

$$T(\boldsymbol{r}) = T_{i\,j}, \qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{S}_{i\,j}. \tag{13}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{n_{i\,j}}}{L_{i\,j}}[-K_j(\boldsymbol{\nabla}\,T)_j + K_i(\boldsymbol{\nabla}\,T)_i], \quad \boldsymbol{r}\in\mathbb{S}_{i\,j}. \tag{14}$$

از تغییر-ِ-حجمها در اثرِ گذار چشم پوشیده شده، که در نتیجه دما یِ گذار هم ثابت گرفته شده. به این ترتیب فشار در تحول نقش ی ندارد. آن چه حلِ معادلاتِ (12) و (13) را دشوار میکند این

است که مرزها به زمان بستِگی دارند. یک تقریب برا یِ وقت ی که تحول ِ مرز کند است این است که (12) و (13) برا یِ مرز ِ ثابت حل شوند و نتیجه برا یِ محاسبه یِ تحول ِ مرز در (14) به کار رود.

4 مثالها

در این بخش ناحیه ای شامل ِ دُ فاز را بررسی میکنم. گرما-یِ-نهان-بر-حجم ِ گذار ِ فاز ِ 1 به 2 را با L نشان میدهم. رسانندگی در هر فاز را ثابت و یکنواخت میگیرم. تحول را هم کند میگیرم و تقریب ِ پایان ِ بخش ِ پیش را به کار میبَرم.

4.1 تحول در یک راستا

حالت ی را در نظر میگیرم که کمیتها به فقط یک مختصه یِ دِکَرتی (x) بستِگی دارند. ناحیِها یِ 1 و 2، به ترتیب، (x_1, x_0) و (x_0, x_2) اند، که x_0 به کندی تغییر میکند. دما یِ x_i را با T_i نشان میدهم. T_0 دما یِ گذار است، که ثابت است. دیده میشود

$$\frac{T_2 - T_0}{L} \geq 0. \tag{15}$$

$$\frac{T_1 - T_0}{L} \leq 0. \tag{16}$$

شرط ِ مرزی را این میگیرم که T_1 و T_2 ثابت َند. در تقریب ِ تحول-ِ-کند، از مشتق ِ زمانی یِ T در (12) چشم میپوشم. مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به x را با $\mathfrak{X}'$ نشان میدهم. (12) نتیجه میدهد

$$T' = \frac{T_1 - T_0}{x_1 - x_0}, \quad x_1 < x < x_0. \tag{17}$$

$$T' = \frac{T_2 - T_0}{x_2 - x_0}, \quad x_0 < x < x_2. \tag{18}$$

(14) میشود

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{L}\left(-K_2\,\frac{T_2 - T_0}{x_2 - x_0} + K_1\,\frac{T_1 - T_0}{x_1 - x_0}\right). \tag{19}$$

4.2 تحول ِ شعاعی

حالت ی را در نظر میگیریم که کمیتها به فقط یک مختصه ی ِ شعاعی (r، فاصله از مبدئ) بستِگی دارند. ناحیِها ی ِ 1 و 2، به ترتیب، (r_1, r_0) و (r_0, r_2) اند، که r_0 به کندی تغییر میکند. دما ی ِ r_i را با T_i نشان میدهم. T_0 دما ی ِ گذار است، که ثابت است. (15) و (16) برقرار َند. شرط ِ مرزی را این میگیرم که T_1 و T_2 ثابت َند. در تقریب ِ تحول- ِ-کند، از مشتق ِ زمانی ی ِ T در (12) چشم میپوشم. مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به r را با $\mathfrak{X}'$ نشان میدهم. (12) نتیجه میدهد

$$T' = \frac{r_0}{r_1}\,\frac{T_1 - T_0}{r_1 - r_0}, \quad r_1 < r < r_0. \tag{20}$$

$$T' = \frac{r_0}{r_2}\,\frac{T_2 - T_0}{x_2 - x_0}, \quad r_0 < r < r_2. \tag{21}$$

(14) میشود

$$\dot{r}_0 = \frac{1}{L\,r_0}\left(-K_2\,r_2\,\frac{T_2 - T_0}{r_2 - r_0} + K_1\,r_1\,\frac{T_1 - T_0}{r_1 - r_0}\right). \tag{22}$$

یک حالت ِ خاص وقت ی ست که r_1 صفر است. این یعنی ناحیه فقط یک مرز ($r = r_2$) دارد. در این حالت (22) میشود

$$\dot{r}_0 = -\frac{K_2\,r_2}{L\,r_0}\,\frac{T_2 - T_0}{r_2 - r_0}, \tag{23}$$

که نشان میدهد T_1 در تحول ِ دما نقش ی ندارد. همچنین، دیده میشود

$$\dot{r}_0 \le 0. \tag{24}$$