**X1-134 (2018/08/29)**

# حرکت ِ یک پرتابه با پسار ِ خطی

**محمد خرمی**

mamwad@mailaps.org

حرکت ِ یک پرتابه درون ِ یک شاره بررسی میشود؛ در حالت ی که پسار خطی ست. معادلات ِ سرعت و مکان، شکل ِ مسیر، و نیز مشخصات ِ نقاط ِ اُج و بازگشت به دست میئایند.

## 1 معادلات ِ دیفرانسیل ِ حرکت

معادله یِ حرکت برا یِ جسم ی که در یک شاره میفتد چنین است.

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}). \tag{1}$$

$\boldsymbol{v}$ سرعت ِ جسم، $\boldsymbol{g}$ شتاب ِ گرانش، و $\boldsymbol{f}$ پسار تقسیم بر جرم ِ جسم است. $\dot{\mathfrak{X}}$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به $t$ (زمان) است. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}, \tag{2}$$

که $\boldsymbol{r}$ مکانِ جسم است. پسار خطی ست وقت ی $\boldsymbol{f}$ نسبت به $\boldsymbol{v}$ خطی باشد. در ساده-ترین-حالت، این یعنی $\boldsymbol{f}$ یک عددِ ثابت ضرب در $\boldsymbol{v}$ باشد. از این پس فرض میکنم چنین است. به این ترتیب،

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g} - \alpha\,\boldsymbol{v}, \tag{3}$$

که $\alpha$ ثابت ی مثبت است.

## 2 معادلاتِ سرعت و مکان

از (3) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{v}_0 - \frac{\boldsymbol{g}}{\alpha}\right)\exp(-\alpha\,t) + \frac{\boldsymbol{g}}{\alpha}, \tag{4}$$

که $\boldsymbol{v}_0$ سرعتِ اولیه است. حدِ سرعت در زمان به بینهایت را با $\boldsymbol{v}_\infty$ نشان میدهم. به $\boldsymbol{v}_\infty$ سرعتِ حد میگویند. اگر سرعتِ جسم این باشد، شتابِ جسم صفر میشود. دیده میشود

$$\boldsymbol{v}_\infty = \frac{\boldsymbol{g}}{\alpha}. \tag{5}$$

از (2) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \left(\boldsymbol{v}_0 - \frac{\boldsymbol{g}}{\alpha}\right)\frac{1-\exp(-\alpha\,t)}{\alpha} + \frac{\boldsymbol{g}\,t}{\alpha}, \tag{6}$$

که $\boldsymbol{r}_0$ مکانِ اولیه است. مبدئ را بر $\boldsymbol{r}_0$ میگذارم. این یعنی $\boldsymbol{r}_0$ را صفر میکنم. پس،

$$\boldsymbol{r} = \left(\boldsymbol{v}_0 - \frac{\boldsymbol{g}}{\alpha}\right)\frac{1-\exp(-\alpha\,t)}{\alpha} + \frac{\boldsymbol{g}\,t}{\alpha}. \tag{7}$$

محورِ $y$ را قائم و رو-به-بالا میگیرم. این یعنی

$$\boldsymbol{g} = -g\,\hat{\boldsymbol{y}}, \tag{8}$$

که $g$ مثبت است. محور ِ $x$ را هم افقی میگیرم، چنان که صفحه یِ حرکت شامل ِ محورها یِ $x$ و $y$ باشد. زاویه یِ $\boldsymbol{v}_0$ با محور ِ $x$ را با $\theta$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$\dot{x} = v_0\,\cos\theta\,\exp(-\alpha\,t). \tag{9}$$

$$\dot{y} = v_0\,\sin\theta\,\exp(-\alpha\,t) - g\,\frac{1-\exp(-\alpha\,t)}{\alpha}. \tag{10}$$

$$x = v_0\,\cos\theta\,\frac{1-\exp(-\alpha\,t)}{\alpha}. \tag{11}$$

$$y = v_0\,\sin\theta\,\frac{1-\exp(-\alpha\,t)}{\alpha} + g\,\frac{1-\alpha\,t-\exp(-\alpha\,t)}{\alpha^2}. \tag{12}$$

زمان را بین ِ (11) و (12) حذف میکنم:

$$y = x\,\tan\theta + \frac{g}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha\,x}{v_0\,\cos\theta} + \ln\left(1-\frac{\alpha\,x}{v_0\,\cos\theta}\right)\right]. \tag{13}$$

## 3 نقطه یِ اُج

نقطه یِ اُج را با زیرنویس ِ 1 نشان میدهم. در این نقطه مئلفه یِ قائم ِ سرعت صفر میشود:

$$\dot{y}_1 = 0. \tag{14}$$

مقدارها یِ متناظر با نبود ِ پسار را با حروف ِ بزرگ نشان میدهم و $a$ را چنین تعریف میکنم.

$$\frac{\alpha\,v_0\,\sin\theta}{g} =: a. \tag{15}$$

دیده میشود

$$\frac{t_1}{T_1} = \frac{\ln(1+a)}{a}. \tag{16}$$

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{X}_1} = \frac{1}{1+a}. \tag{17}$$

$$\frac{x_1}{X_1} = \frac{1}{1+a}. \tag{18}$$

$$\frac{y_1}{Y_1} = \frac{2[a-\ln(1+a)]}{a^2}. \tag{19}$$

## 4 نقطه یِ بازگشت

نقطه یِ بازگشت را با زیرنویس ِ 2 نشان میدهم. در این نقطه مئلفه یِ قائم ِ مکان صفر میشود:

$$y_2 = 0. \tag{20}$$

$b$ را چنین تعریف میکنم.

$$\frac{\alpha\, x_2}{v_0\, \cos\theta} =: b. \tag{21}$$

دیده میشود

$$0 = b(1+a) + \ln(1-b). \tag{22}$$

$$\frac{t_2}{T_2} = -\frac{\ln(1-b)}{2\,a}. \tag{23}$$

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{X}_2} = 1 - b. \tag{24}$$

$$\frac{x_2}{X_2} = \frac{b}{2\,a}. \tag{25}$$

$$\frac{\dot{y}_2}{\dot{Y}_2} = \frac{b - a + a\,b}{a}. \tag{26}$$

## 5 حالتها یِ حدی

حالتها یی که پسار کوچک یا بزرگ است را بررسی میکنم.

### 5.1 پسار ِ کوچک

وقت ی $\alpha$ کوچک است، $a$ و $b$ هم کوچک َند (و هم-مرتبه با $\alpha$ یَند). در این حالت،

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}\,t - \frac{a\,t}{T_1}\left(\boldsymbol{v}_0 + \frac{\boldsymbol{g}\,t}{2}\right) + o(\alpha). \tag{27}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0\,t + \frac{\boldsymbol{g}\,t^2}{2} - \frac{a\,t}{T_1}\left(\frac{\boldsymbol{v}_0\,t}{2} + \frac{\boldsymbol{g}\,t^2}{3}\right) + o(\alpha). \tag{28}$$

$$y = x\,\tan\theta - \frac{g\,x^2}{2\,v_0^2\,\cos^2\theta} - \frac{b\,x}{x_2}\,\frac{g\,x^2}{3\,v_0^2\,\cos^2\theta} + o(\alpha). \tag{29}$$

در نبود ِ پسار، مسیر ِ حرکت نسبت به محور ِ قائم ی که از نقطه یِ اُج میگذرد متقارن است. پسار این تقارن را میشکند: بخش ی که پس از این محور ِ قائم است کوچکتر از بخش ی ست که پیش از این محور است.

برا یِ نقطه یِ اُج،

$$\frac{t_1}{T_1} = 1 - \frac{a}{2} + o(\alpha). \tag{30}$$

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{X}_1} = 1 - a + o(\alpha). \tag{31}$$

$$\frac{x_1}{X_1} = 1 - a + o(\alpha). \tag{32}$$

$$\frac{y_1}{Y_1} = 1 - \frac{2\,a}{3} + o(\alpha). \tag{33}$$

برا یِ نقطه یِ بازگشت، از (22) دیده میشود

$$a = \frac{b}{2} + \frac{b^2}{3} + o(\alpha^2), \tag{34}$$

یا

$$b = 2\,a - \frac{8\,a^2}{3} + o(\alpha^2). \tag{35}$$

به این ترتیب،

$$\frac{t_2}{T_2} = 1 - \frac{a}{3} + o(\alpha). \tag{36}$$

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{X}_2} = 1 - 2\,a + o(\alpha). \tag{37}$$

$$\frac{x_2}{X_2} = 1 - \frac{4\,a}{3} + o(\alpha). \tag{38}$$

$$\frac{\dot{y}_2}{\dot{Y}_2} = 1 - \frac{2\,a}{3} + o(\alpha). \tag{39}$$

از جمله معلوم میشود

$$\frac{t_2 - t_1}{T_1} = 1 - \frac{a}{6} + o(\alpha). \tag{40}$$

$$\frac{x_2 - x_1}{X_1} = 1 - \frac{5\,a}{3} + o(\alpha). \tag{41}$$

## 5.2 پسار ِ بزرگ

وقت ی $\alpha$ بزرگ است، $a$ بزرگ است و $b$ نزدیک ِ یک است. در این حالت،

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0\, \exp(-\alpha\, t) + \frac{\boldsymbol{g}}{\alpha} + \cdots . \tag{42}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0\, \frac{1-\exp(-\alpha\, t)}{\alpha} + \frac{\boldsymbol{g}\, t}{\alpha} + \cdots . \tag{43}$$

$$y = x\, \tan\theta + \cdots , \qquad x < \frac{X_1}{a}. \tag{44}$$

$$0 \le y \le \frac{X_1\, \tan\theta}{a} + \cdots , \qquad x = \frac{X_1}{a}. \tag{45}$$

مسیر ِ حرکت پیش از نقطه یِ اُج تقرسبَن یک خط ِ راست است که موازی با سرعت ِ اولیه است، و پس از نقطه یِ اُج تقریبَن یک خط ِ قائم است.

برا یِ نقطه یِ اُج،

$$\frac{t_1}{T_1} = \frac{\ln a}{a} + \cdots . \tag{46}$$

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{X}_1} = \frac{1}{a} + \cdots . \tag{47}$$

$$\frac{x_1}{X_1} = \frac{1}{a} + \cdots . \tag{48}$$

$$\frac{y_1}{Y_1} = \frac{2}{a} + \cdots . \tag{49}$$

برا یِ نقطه یِ بازگشت، از (22) دیده میشود

$$a = -1 - \ln(1-b) + \cdots , \tag{50}$$

یا

$$b = 1 - \exp[-(a+1)] + \cdots . \tag{51}$$

به این ترتیب،

$$\frac{t_2}{T_2} = \frac{1}{2} + \cdots . \tag{52}$$

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{X}_2} = \exp[-(a+1)] + \cdots . \tag{53}$$

$$\frac{x_2}{X_2} = \frac{1}{2\,a} + \cdots . \tag{54}$$

$$\frac{\dot{y}_2}{\dot{Y}_2} = \frac{1}{a} + \cdots . \tag{55}$$

از جمله معلوم میشود

$$\frac{t_2 - t_1}{T_1} = 1 + \cdots . \tag{56}$$

$$\frac{x_2 - x_1}{X_1} = \frac{1}{a^2} + \cdots . \tag{57}$$