X1-135 (2018/10/19)

میدان ِ الکتریکی یِ نیم-خط و نیم-صفحه

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

میدان ِ الکتریکی یِ یک نیم-خط ِ یکنواخت-باردار-شده به دست میئاید، و نشان داده میشود میدان ِ الکتریکی یِ یک نیم-صفحه یِ یکنواخت-باردار-شده خُش-تعریف نیست.

0 درامد

میدان ِ الکتریکی یِ یک چشمه یِ ایستا یِ جایگزیده، به شرط ِ آن که چگالی-یِ-بار خیلی بدرفتار نباشد خُش-تعریف است. اما اگر چشمه جایگزیده نباشد لزومَن چنین نیست. یک راه ِ ساده برا یِ تعیین ِ خُش-تعریف-بودن ِ میدان، بُعد-شماری ست. میدان ِ یک چشمه یِ ایستا چنین است.

$$\boldsymbol{E} = K \int \frac{\mathrm{d}\, q'\, (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}, \tag{1}$$

که $\boldsymbol{E}$ میدان در نقطه یِ $\boldsymbol{r}$ است و بار با q نشان داده شده. پتانسیل ِ متناظر را با ϕ نشان میدهم:

$$\phi = K \int \frac{\mathrm{d}\, q'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \tag{2}$$

و البته،

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\,\phi. \tag{3}$$

با فرض ِ این که بار ِ درون ِ گوی ی به شعاع ِ R، در R ها یِ بزرگ مثل ِ R^α رفتار کند، واگرایی یِ ناشی از انتگرال ِ رابطه یِ (1)، در جاها یِ دور وجود ندارد اگر

$$\alpha < 2. \tag{4}$$

برا یِ رابطه یِ (2)، شرط ِ متناظر میشود

$$\alpha < 1. \tag{5}$$

البته ممکن است طرف ِ راست ِ (1) خُش-رفتار باشد، ولی طرف ِ راست ِ (2) چنین نباشد، و (3) برا یِ ϕ جواب داشته باشد.

اگر چگالی یِ بار در جاها یِ دور به یک ثابت ِ ناصفر بگراید، α هم ان بُعد ِ چشمه است. این نشان میدهد برا یِ چشمِها یِ با بُعد ِ کمتر از 2 میدان خُش-تعریف است. از جمله میدان ِ حاصل از یک خط ِ باردار (بُعد ِ 1) خُش-تعریف است. بُعد ِ 2 (صفحه) مرز ِ خُش-تعریف-ماندن ِ میدان است. بُعد-شماری یِ ساده نتیجه میدهد میدان ِ یک صفحه هم بی-پایان است: طرف ِ راست ِ (1) لگاریتمی واگرا ست. اما میدان ِ حاصل از یک صفحه یِ از-همه-سو-بیپایان ِ یکنواخت-باردار-شده، به یک معنی خُش-تعریف است: اگر انتگرال-گیری بر یک قرص به مبدئ ِ ثابت و شعاع ِ R انجام شود و بَعد R به بینهایت برود، میدان باپایان میمانَد: هم ان میدان ی که برا یِ یک صفحه یِ یکنواخت-باردار-شده مینویسند:

$$\boldsymbol{E} = (2\,\pi\,K\,\sigma)\frac{\boldsymbol{r}_\perp}{|\boldsymbol{r}_\perp|}, \tag{6}$$

که σ چگالی-یِ-سطحی یِ بار و $\boldsymbol{r}_\perp$ تصویر ِ $\boldsymbol{r}$ در راستا یِ عمود بر صفحه است. در واقع طرف ِ راست ِ (1) واگرا ست، اما میشود نُع ی مقدار- ِ-اصلی یِ همگرا برا یَ ش تعریف کرد.

چنان که خاهیم دید، برا یِ چشمه ای به شکل ِ نیم-صفحه، تعریف ِ مقدار- ِ-اصلی هم ممکن نیست.

1 نیم-خط

بر یک نیم-خط بار ی با چگالی-یِ-طولی یِ ثابت ِ λ هست. نیمه یِ مثبت ِ محور ِ z را بر این نیم-خط میگذارم، چنان که مبدئ سر ِ نیم-خط است. مختصات ِ استوانِئی یِ (ρ, φ, z) را به کار میبَرم. از (1) دیده میشود

$$\boldsymbol{E} = (K\,\lambda)\left\{\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\rho\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,z'}{[(z-z')^2+\rho^2]^{3/2}} + \hat{\boldsymbol{z}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,z'\,(z-z')}{[(z-z')^2+\rho^2]^{3/2}}\right\}. \quad (7)$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{E} = (K\,\lambda)\left[\frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\rho}\left(1+\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right) - \frac{\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]. \quad (8)$$

از جمله،

$$\boldsymbol{E} = (K\,\lambda)\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\rho}{2\,z^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{z}}}{z} + \cdots\right), \qquad z \ll -\rho. \quad (9)$$

$$\boldsymbol{E} = (K\,\lambda)\left(\frac{2\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\rho} - \frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\rho}{2\,z^2} - \frac{\hat{\boldsymbol{z}}}{z} + \cdots\right), \qquad z \gg \rho. \quad (10)$$

برا یِ نیم-خط، پتانسیل را نمیشود از (2) به دست آورد: طرف ِ راست لگاریتمی واگرا ست. اما با استفاده از (3) میشود یک پتانسیل متناظر با (8) به دست آورد:

$$\phi = (K\,\lambda)\left(\sinh^{-1}\frac{z}{\rho} - \ln\frac{\rho}{a}\right), \quad (11)$$

که a یک ثابت است. از جمله،

$$\phi = (K\,\lambda)\left(\ln\frac{\rho}{2|z|} - \ln\frac{\rho}{a} - \frac{\rho^2}{4\,z^2} + \cdots\right), \qquad z \ll -\rho. \quad (12)$$

$$\phi = (K\,\lambda)\left(\ln\frac{2|z|}{\rho} - \ln\frac{\rho}{a} + \frac{\rho^2}{4\,z^2} + \cdots\right), \qquad z \gg \rho. \quad (13)$$

2 نیم-صفحه

بر یک نیم-صفحه بار ی با چگالی-یِ-سطحی یِ ثابت ِ σ هست. نیمه یِ $(x > 0)$ ِ صفحه یِ $(z = 0)$ را بر این نیم-صفحه میگذارم، چنان که محور ِ y لبه یِ این نیم-صفحه است. (x, y, z)

مختصاتِ دکَرتی یَند. محاسبات را برا یِ نوار ی که بینِ $(x = 0)$ و $(x = L)$ است انجام میدهم و سپس میکوشم حدِ $(L \to \infty)$ را حساب کنم. کمیتها یِ متناظر با نوار را با شاخصِ L مشخص میکنم. میدانِ الکتریکی یِ یک خط با چگالی-یِ-طولی یِ ثابتِ λ را با $\boldsymbol{E}_\lambda$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{E}_\lambda = (2\,K\,\lambda)\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^2}, \tag{14}$$

که $\boldsymbol{R}$ تصویرِ مکانِ نقطه یِ مشاهده نسبت به مکانِ میله، بر صفحه ای عمود بر میله است. از اینجا،

$$\boldsymbol{E}_L = (2\,K\,\sigma)\left[\hat{\boldsymbol{x}}\int_0^L \frac{\mathrm{d}\,x'\,(x-x')}{(x-x')^2+z^2} + \hat{\boldsymbol{z}}\,z\int_0^L \frac{\mathrm{d}\,x'}{(x-x')^2+z^2}\right]. \tag{15}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{E}_L = (2\,K\,\sigma)\left[\frac{\hat{\boldsymbol{x}}}{2}\,\ln\frac{x^2+z^2}{(L-x)^2+z^2} + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\tan^{-1}\frac{L-x}{z} + \tan^{-1}\frac{x}{z}\right)\right]. \tag{16}$$

از جمله برا یِ L ها یِ بزرگ،

$$\boldsymbol{E}_L = (2\,K\,\sigma)\left\{\hat{\boldsymbol{x}}\,\ln\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{L} + \hat{\boldsymbol{z}}\left[\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(z) + \tan^{-1}\frac{x}{z}\right] + \cdots\right\}, \tag{17}$$

که sgn تابعِ علامت است. دیده میشود $\boldsymbol{E}_L$ در $(L \to \infty)$ واگرا ست: مئلفه یِ x ِ میدان واگرا میشود.

پتانسیلِ متناظر با (16) چنین میشود.

$$\begin{aligned}\phi_L = -(2\,K\,\sigma)\bigg[&(L-x)\,\ln\frac{\sqrt{(L-x)^2+z^2}}{b} + x\,\ln\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{b}\\ &+ z\left(\tan^{-1}\frac{L-x}{z} + \tan^{-1}\frac{x}{z}\right)\bigg],\end{aligned} \tag{18}$$

که b یک ثابت است. از جمله برا یِ L ها یِ بزرگ،

$$\phi_L = -(2\,K\,\sigma)\left(L\,\ln\frac{L}{b} + x\,\ln\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{L} + \frac{\pi}{2}\,|z| + z\,\tan^{-1}\frac{x}{z} + \cdots\right). \tag{19}$$

ϕ_L هم در $(L \to \infty)$ واگرا میشود. جمله یِ اول ِ درون ِ پرانتز ِ بزرگ، هر چند در $(L \to \infty)$ واگرا میشود مهم نیست، چون ثابت است. میشود آن را از پتانسیل حذف کرد. نتیجه $\tilde{\phi}_L$ است:

$$\tilde{\phi}_L = -(2\,K\,\sigma)\left(x\,\ln\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{L} + \frac{\pi}{2}\,|z| + z\,\tan^{-1}\frac{x}{z} + \cdots\right). \tag{20}$$

اما $\tilde{\phi}_L$ هم در $(L \to \infty)$ واگرا ست. و واگرایی یِ آن وابسته-به-مکان است و برداشتنی نیست.