X1-138 (2019/02/21)

ذره یِ باردار در میدان ِ الکتریکی یِ یک سیم ِ دراز

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

میدان ِ الکتریکی یِ یک سیم ِ دراز، هم تقارن ِ سمتی دارد و هم تقارن ِ انتقالی. به هم ین خاطر حرکت ِ یک ذره یِ باردار در آن حل-پذیر است. این حرکت بررسی میشود.

1 میدان ِ الکتریکی، پتانسیل، و لگرانژی

یک سیم ِ دراز چگالی-یِ-بار ِ یکنواخت و ثابت ِ λ دارد. محور ِ z را رو یِ این سیم میگذارم. $\boldsymbol{E}$ (میدان ِ الکتریکی) میشود

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mu_0\, c^2\, \lambda}{2\, \pi\, \rho}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}, \tag{1}$$

که (ρ, ϕ, z) مختصات ِ استوانِئی یَند. Φ (پتانسیل ِ الکتریکی) میشود

$$\Phi = -\frac{\mu_0\, c^2\, \lambda}{2\, \pi}\, \ln\frac{\rho}{a}, \tag{2}$$

که a پارامتر ی ثابت است.

لَگرانژی یِ یک ذره به جرم ِ m و بار ِ q که در میدان ِ الکتریکی یِ متناظر با پتانسیل ِ Φ حرکت میکند چنین است.

$$L = \frac{m}{2}\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} - q\, \Phi. \tag{3}$$

L لَگرانژی و $\boldsymbol{v}$ سرعت است. L را بر حسب ِ مختصات ِ استوانئی و با Φ متناظر با (2) مینویسم:

$$L = m\, \left[\frac{1}{2}\,(\dot\rho^2 + \rho^2\, \dot\phi^2 + \dot z^2) + k\, \ln\frac{\rho}{a}\right], \tag{4}$$

که $\dot{\mathfrak{X}}$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به t (زمان) است و

$$k = \frac{\mu_0\, c^2\, \lambda\, q}{2\, \pi\, m}. \tag{5}$$

2 تقارنها و ثابت- ِ-حرکتها

z و ϕ در لَگرانژی نیستند، پس p_z و p_ϕ (تکانِها یِ متناظر) ثابت- ِ-حرکت َند.

$$p_z = m\, \dot z. \tag{6}$$

$$p_\phi = m\, \rho^2\, \phi. \tag{7}$$

ثابتها یِ متناظر، تقسیم بر m، را با، به ترتیب، w و ℓ نشان میدهم:

$$w = \dot z. \tag{8}$$

$$\ell = \rho^2\, \dot\phi. \tag{9}$$

t هم در لَگرانژی نیست. پس H (همیلتنی) هم ثابت- ِ-حرکت است.

$$H = \frac{m}{2}\,(\dot\rho^2 + \rho^2\, \dot\phi^2 + \dot z^2) - m\, k\, \ln\frac{\rho}{a}. \tag{10}$$

$(2\, H/m)$ را، که طی ِ حرکت ثابت میمانَد، با ε نشان میدهم:

$$\varepsilon = \dot\rho^2 + \rho^2\, \dot\phi^2 + \dot z^2 - 2\, k\, \ln\frac{\rho}{a}. \tag{11}$$

با استفاده از (8) و (9)، رابطه یِ (11) چنین میشود.

$$\varepsilon = \dot{\rho}^2 + f(\rho), \tag{12}$$

که

$$f(\rho) = \frac{\ell^2}{\rho^2} - 2\,k\,\ln\frac{\rho}{a} + w^2. \tag{13}$$

مسئله یِ سه-بُعدی به یک مسئله یِ یک-بُعدی تبدیل میشود.

3 حرکت

تصویر ِ حرکت در راستا یِ z از تصویر ِ حرکت در صفحه یِ $z = 0$ جدا میشود. سرعت ِ حرکت در راستا یِ z ثابت است (هم ان w است). برا یِ تصویر ِ حرکت در صفحه یِ $z = 0$، $\tilde{\varepsilon}$ و $\tilde{f}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - w^2. \tag{14}$$

$$\tilde{f} = f - w^2. \tag{15}$$

دیده میشود

$$\lim_{\rho\to 0}[\tilde{f}(\rho)] = \infty. \tag{16}$$

$$\lim_{\rho\to\infty}[\tilde{f}(\rho)] = -[\mathrm{sgn}(k)]\,\infty. \tag{17}$$

اگر k مثبت باشد، $\tilde{f}(\rho)$ بر حسب ِ ρ نزولی ست. در این حالت یک نقطه یِ بازگشت هست. این نقطه را با ρ_1 نشان میدهم:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{f}(\rho_1). \tag{18}$$

ρ از ρ_1 کمتر نمیشود. در $\rho \to \infty$ هم $\dot{\rho}$ بینهایت میشود.

اگر k منفی باشد، $f(\rho)$ در $\rho = \rho_0$ کمینه میشود، که

$$\frac{\ell^2}{\rho_0^2} = -k. \tag{19}$$

در این حالت دُ نقطه یِ بازگشت (ρ_1 و ρ_2) هستند که ρ_0 بین ِ آنها ست و

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{f}(\rho_j), \quad j = 1, 2. \tag{20}$$

البته

$$\tilde{\varepsilon} \geq \tilde{f}(\rho_0). \tag{21}$$

ρ_1 را نقطه-یِ-بازگشت ِ کوچکتر میگیرم. ρ_1 و ρ_2، به ترتیب، کمینه و بیشنه یِ ρ هستند.

در حالت ِ کلی، با استفاده از (12) میشود t را بر حسب ِ ρ به دست آورد:

$$t = \int^{\rho} \frac{\pm \mathrm{d}\, s}{\sqrt{\tilde{\varepsilon} - \tilde{f}(s)}}. \tag{22}$$

وارون ِ رابطه یِ t بر حسب ِ ρ، رابطه یِ ρ بر حسب ِ t را میدهد. با گذاشتن ِ ρ بر حسب ِ t در رابطه یِ (9)، $\dot{\phi}$ و از آنجا ϕ بر حسب ِ t به دست میئاید.

میشود زمان را بین ِ معادلات حذف کرد و معادله یِ مسیر را به دست آورد. از (9) دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\ell}{\rho^2}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, \phi}. \tag{23}$$

مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به ϕ را با $\mathfrak{X}'$ نشان میدهم. (8) و (12)، به ترتیب، میشوند

$$w = \frac{\ell}{\rho^2}\, z'. \tag{24}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\ell^2}{\rho^4}\, \rho'^2 + \tilde{f}(\rho). \tag{25}$$

u، g، و $\tilde{g}$ را چنین تعریف میکنم.

$$u = \frac{1}{\rho}. \tag{26}$$

$$\begin{aligned} g(u) &= f(\rho), \\ &= \ell^2\, u^2 + 2\, k\, \ln(a\, u) + w^2. \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(u) &= \tilde{f}(\rho), \\ &= \ell^2\, u^2 + 2\, k\, \ln(a\, u). \end{aligned} \tag{28}$$

به این ترتیب،

$$z' = \frac{w}{\ell\, u^2}. \tag{29}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \ell^2\, u'^2 + \tilde{g}(u). \tag{30}$$

پس،

$$\phi = \int^u \frac{\pm\,\ell\,\mathrm{d}\,\sigma}{\sqrt{\tilde{\varepsilon} - \tilde{g}(\sigma)}}. \tag{31}$$

این ϕ را بر حسب ِ u میدهد، که با وارون-کردن َ ش u بر حسب ِ ϕ به دست میئاید. u بر حسب ِ ϕ را در (29) میگذارم. z'، و از آنجا z بر حسب ِ ϕ به دست میئاید.

4 مسیر ِ مارپیچی

اگر k منفی باشد، یک حالت ِ خاص ِ حرکت این است که ρ ثابت بماند. چنین میشود، اگر و تنها اگر

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{f}(\rho_0). \tag{32}$$

در این حالت ρ برابر با ρ_0 میمانَد و $\dot{\phi}$ هم ثابت میمانَد. مقدارها یِ متناظر با این حالت را با شاخص ِ 0 نشان میدهم. دیده میشود

$$\rho_0^2\,\dot{\phi}_0^2 = -k, \tag{33}$$

که البته یعنی

$$m\,\rho_0\,\dot{\phi}_0^2 = -q\,E_0. \tag{34}$$

حرکت بر یک مارپیچ ِ منظم به شعاع ِ ρ_0 و پا یِ Δ_0 است. Δ_0 جا-به-جایی در جهت ِ محور ِ z به ازا یِ یک دُره یِ تصویر ِ حرکت بر صفحه یِ $z = 0$ است. پس،

$$\Delta_0 = \frac{2\,\pi\,w}{\dot{\phi}_0}, \tag{35}$$

یا،

$$\Delta_0 = -\frac{2\,\pi\,w\,\ell}{k}. \tag{36}$$

زاویه یِ مارپیچ با صفحه یِ $z=0$ را با θ_0 نشان میدهم. دیده میشود

$$\theta_0 = -\tan^{-1}\frac{w\,(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})_0}{k}. \tag{37}$$