X1-139 (2019/04/12)

ذره یِ باردار در میدانها یِ مغناطیسی و الکتریکی یِ یک سیمِ دراز

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

میدانها یِ مغناطیسی و الکتریکی یِ یک سیمِ دراز، هم تقارنِ سمتی دارند و هم تقارنِ انتقالی. در نتیجه حرکتِ یک ذره یِ باردار در این میدانها حل-پذیر است. این حرکت بررسی میشود. در حالتِ نانسبیتی، این مسئله با یک خیز به مسئله یِ حرکت در فقط میدانِ مغناطیسی تبدیل میشود.

1 میدانها یِ مغناطیسی و الکتریکی، پتانسیلها، و لَگرانژی

جریانِ ثابتِ I از یک سیمِ دراز میگذرد. این سیم چگالی-یِ-بارِ یکنواخت و ثابتِ λ هم دارد. محورِ z را رو یِ این سیم میگذارم، چنان که سمتِ قراردادی یِ جریان به سو یِ z ها یِ مثبت باشد. چنان که در [1] و [2] آمده، $\boldsymbol{B}$ (میدانِ مغناطیسی) و $\boldsymbol{E}$ (میدانِ الکتریکی) میشوند

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\,\rho}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mu_0\, c^2\,\lambda}{2\,\pi\,\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}, \tag{2}$$

که (ρ, ϕ, z) مختصات ِ استوانِئی یَند. $\boldsymbol{A}$ (پتانسیل ِ برداری) و Φ (پتانسیل ِ اسکالر) هم میشوند

$$\boldsymbol{A} = -\frac{\mu_0\, I}{2\,\pi}\,\left(\ln\frac{\rho}{a}\right)\,\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{3}$$

$$\Phi = -\frac{\mu_0\, c^2\,\lambda}{2\,\pi}\,\left(\ln\frac{\rho}{a}\right), \tag{4}$$

که a پارامتر ی ثابت است.

لَگرانژی یِ یک ذره به جرم ِ m و بار ِ q در پتانسیلها یِ $\boldsymbol{A}$ و Φ چنین است.

$$L = \frac{m}{2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + q\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} - q\,\Phi. \tag{5}$$

L لَگرانژی و $\boldsymbol{v}$ سرعت است. مسئله در حالت ِ نانسبیتی بررسی میشود. به هم ین خاطر جمله یِ جنبشی یِ لَگرانژی به شکل ِ جمله یِ اول ِ طرف ِ راست است. L را بر حسب ِ مختصات ِ استوانِئی و با $\boldsymbol{A}$ و Φ متناظر با (3) و (4) مینویسم:

$$L = m\,\left[\frac{1}{2}\,(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - b\,\dot{z}\,\ln\frac{\rho}{a} + k\,\ln\frac{\rho}{a}\right], \tag{6}$$

که $\dot{\mathfrak{x}}$ مشتق ِ $\mathfrak{x}$ نسبت به t (زمان) است و

$$b = \frac{\mu_0\,I\,q}{2\,\pi\,m}. \tag{7}$$

$$k = \frac{\mu_0\,c^2\,\lambda\,q}{2\,\pi\,m}. \tag{8}$$

با یک تغییر- ِ-متغیر میشود این مسئله را به مسئله ای مشابه تبدیل کرد، که در آن میدان ِ الکتریکی صفر است:

$$z = \tilde{z} + V\,t, \tag{9}$$

که

$$V = \frac{k}{b}, \tag{10}$$

یا

$$V = \frac{c^2\,\lambda}{I}. \tag{11}$$

برحسبِ متغیرِ جدیدِ $\tilde{z}$،

$$L = \tilde{L} + m\,\left(V\,\dot{\tilde{z}} + \frac{V^2}{2}\right), \qquad (12)$$

که،

$$\tilde{L} = m\,\left[\frac{1}{2}\,(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\phi}^2 + \dot{\tilde{z}}^2) - b\,\dot{\tilde{z}}\,\ln\frac{\rho}{a}\right]. \qquad (13)$$

$(L - \tilde{L})$ یک مشتقِ کامل نسبت به زمان است. پس برا یِ معادله یِ حرکت میشود $\tilde{L}$ را به جا یِ L به کار برد.

2 حرکت

معادلاتِ حرکت برا یِ $(\rho, \phi, \tilde{z})$ هم انها هستند که در [1] برا یِ (ρ, ϕ, z) به دست آمده اند. پس از حلِ معادلات برا یِ $(\rho, \phi, \tilde{z})$ هم، با استفاده از (9) میشود z را حساب کرد: میدانِ الکتریکی اثرَش فقط یک خیز با سرعتِ V در جهتِ z است.

از جمله برا یِ حرکتِ مارپیچی،

$$\rho_0^2\,\dot{\phi}_0^2 = b\,(\dot{z}_0 - V), \qquad (14)$$

که مقدارها یِ متناظر با این حالت با شاخصِ صفر نشان داده شده اند. Δ_0 (پا یِ مارپیچ) میشود

$$\Delta_0 = 2\,\pi\,\left(\frac{\rho_0^2\,\dot{\phi}_0}{b} + \frac{V}{\dot{\phi}_0}\right), \qquad (15)$$

یا،

$$\Delta_0 = 2\,\pi\,\left(\frac{\ell}{b} + \frac{V\,\rho_0^2}{\ell}\right). \qquad (16)$$

θ_0 (زاویه یِ مارپیچ با صفحه یِ $z = 0$) هم میشود

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left[\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})_0}{b} + \frac{V}{(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})_0}\right]. \qquad (17)$$

در یک حالت ِ خاص، Δ_0 و θ_0 صفر میشوند. این وقت ی رخ میدهد که

$$k = -\rho_0^2\,\dot{\phi}_0^2. \tag{18}$$

در این حالت

$$\dot{z}_0 = 0, \tag{19}$$

حرکت بر یک دایره است، نیرو یِ مغناطیسی صفر است، و شتاب ِ مرکزگرا را نیرو یِ الکتریکی تئمین میکند.

3 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «ذره یِ باردار در میدان ِ مغناطیسی یِ یک سیم ِ دراز»؛ (2019/01/22) X1-137

[2] محمد خرمی؛ «ذره یِ باردار در میدان ِ الکتریکی یِ یک سیم ِ دراز»؛ (2019/02/21) X1-138