X1-141 (2019/07/27)

یک ذره یِ نسبیتی یِ با-ساختار

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

لگرانژی، تکانه، و معادله-یِ-حرکت ِ یک ذره یِ نسبیتی بررسی میشود که ساختار ِ درونی دارد. وابستِگی یِ این ساختار به سرعت، و اثر ِ آن بر تکانه و معادله-یِ-حرکت بررسی میشود.

0 قراردادها

قراردادها هم ان اند که در [1] و [2] به کار رفته. r^μ ها مئلفِها یِ چاربردار ِ مکان َند، و t زمان و η متریک (ِ مینکُفسکی [3]) است:

$$r^0 = t. \tag{1}$$

$$\eta_{\mu\,\nu} = \delta_{\mu\,\nu} - (1 + c^2)\,\delta^0_\mu\,\delta^0_\nu. \tag{2}$$

بردارها یِ سه-مئلفِئی (با مئلفِها یِ فضایی) را با حروف ِ سیاه، و ویژه-زمان را با τ نمایش میدهم. شاخصها یی که مقدارها یِ فضا-زمانی (از 0 تا 3) را میگیرند را با حروف ِ یونانی و شاخصها یی که فقط مقدارها یِ فضایی (از 1 تا 3) را میگیرند را با حروف ِ لاتین نمایش میدهم. سرعت (مشتق ِ مکان نسبت به زمان) را با $\boldsymbol{v}$، و چاربردار ِ سرعت (مشتق ِ چاربردار ِ مکان نسبت به ویژه-زمان) را با

u نشان میدهم:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t}. \tag{3}$$

$$v^0 = 1. \tag{4}$$

$$u = \frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{5}$$

دیده میشود

$$u = \gamma\, v, \tag{6}$$

که γ ضریب ِ لُرِنتس [4] است:

$$\begin{aligned}\gamma &= (1 - c^{-2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})^{-1/2},\\ &= \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau}.\end{aligned} \tag{7}$$

رُشن است که

$$u\cdot u = -c^2. \tag{8}$$

رابطه یِ E (انرژی) با p (تکانه) این است.

$$E = c^2\,p^0. \tag{9}$$

1 لَگرانژی و تکانه

لَگرانژی ضرب در ضریب ِ لُرِنتس [4]، تحت ِ تبدیلها یِ پُوَنکَره [5] اسکالر است (وقت ی تبدیل هم-زمان بر سرعت، ساختار ِ درونی، و میدانها یِ خارجی اعمال شود). مثل ِ [2] لَگرانژی (L) را بر حسب ِ جرم ِ مئثر ($\mathfrak{m}$) مینویسم:

$$L = -\mathfrak{m}\,c^2\,\gamma^{-1}. \tag{10}$$

لَگرانژی و جرم ِ مئثر تابع ِ فضا-زمان، چاربردار ِ سرعت، و ساختار ِ درونی هستند. بستِگی به فضا-زمان را از طریق ِ میدانها یِ خارجی میگیرم. میدانها یِ خارجی را با T، و ساختار ِ درونی را با W نشان میدهم. جرم ِ مئثر چنان است که

$$\mathfrak{m}[u', W', T'(r')] = \mathfrak{m}[u, W, T(r)], \tag{11}$$

که متغیرها یِ پریم-دار تبدیل-یافته یِ متغیرها یِ بدون- -پریم تحت ِ تبدیلها یِ پُوَنکَره [5] اند. (11) پُوَنکَره-هموردایی یِ کنش (یا اسکالر-بودن ِ جرم ِ مئثر) است.

برا یِ محاسبه یِ تکانه، دانستن ِ بستِگی یِ لَگرانژی به سرعت لازم است. لَگرانژی از طریق ِ ضریب ِ لُرِنتس [4] و چاربردار ِ سرعت، و نیز از طریق ِ ساختار ِ درونی به سرعت مربوط است. به بستِگی از طریق ِ ضریب ِ لُرِنتس [4] و چاربردار ِ سرعت بستِگی یِ آشکار، و به بستِگی از طریق ِ ساختار ِ درونی بستِگی یِ نهان میگویم.

1.1 بستِگی یِ آشکار ِ لَگرانژی به سرعت

بستِگی یِ آشکار ِ لَگرانژی به سرعت از طریق ِ γ و u است، که هر-دُ به $\boldsymbol{v}$ وابسته اند. از

$$\frac{\partial\,\gamma}{\partial\,v^i} = c^{-2}\,\gamma^3\,v_i, \tag{12}$$

نتیجه میشود

$$\frac{\partial\,\gamma^{-1}}{\partial\,v^i} = -c^{-2}\,u_i. \tag{13}$$

$$\frac{\partial\,u^\alpha}{\partial\,v^i} = \gamma\,(\delta^\alpha_i + c^{-2}\,u^\alpha\,u_i). \tag{14}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}-\frac{\partial\,u^\alpha}{\partial\,v^i}\,v^i &= -\delta^\alpha_i\,u^i - c^{-2}\,u^\alpha\,u_i\,u^i,\\ &= \delta^\alpha_0\,u^0 - u^\alpha + c^{-2}\,u^\alpha\,u_0\,u^0 - c^{-2}\,u^\alpha\,(u\cdot u),\end{aligned} \tag{15}$$

که نتیجه میدهد

$$-\frac{\partial\,u^\alpha}{\partial\,v^i}\,v^i = \gamma\,(\delta^\alpha_0 + c^{-2}\,u^\alpha\,u_0). \tag{16}$$

$\mathfrak{h}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{h}^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + c^{-2}\, u^\alpha\, u_\beta. \tag{17}$$

$\mathfrak{h}$ افکنش بر فضا یِ عمود بر u است، یعنی اثر َش بر هر بردار ِ عمود بر u همانی، و بر u صفر است. دیده میشود

$$\frac{\partial\, u^\alpha}{\partial\, v^i} = \gamma\, \mathfrak{h}^\alpha_i, \tag{18}$$
$$-\frac{\partial\, u^\alpha}{\partial\, v^i}\, v^i = \gamma\, \mathfrak{h}^\alpha_0. \tag{19}$$

1.2 بستگی یِ نهان ِ لگرانژی به سرعت

بستگی یِ نهان ِ لگرانژی به سرعت از طریق ِ W است. یک راه ِ بررسی یِ تغییر ِ W به خاطر ِ تغییر ِ $\boldsymbol{v}$ این است که W تابع ی از $\boldsymbol{v}$ و یک W یِ چارچوب- ِ-سکون فرض شود. منظور از تغییر ِ W به خاطر ِ تغییر ِ $\boldsymbol{v}$ تغییر ِ W در حالت ی ست که W یِ چارچوب- ِ-سکون ثابت میمانَد.

گیرم سرعت از $\boldsymbol{v}$ به $\tilde{\boldsymbol{v}}$ تبدیل شود، که

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} + \delta\, \boldsymbol{v}. \tag{20}$$

در این صورت $\mathfrak{X}$ به $\tilde{\mathfrak{X}}$ تبدیل میشود، که

$$\tilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} + \delta\, \mathfrak{X} + o(\delta\, \boldsymbol{v}), \tag{21}$$

و $(\delta\, \mathfrak{X})$ نسبت به $(\delta\, \boldsymbol{v})$ خطی ست. عملگر ی که تانسر ِ W را به $\tilde{W}$ تبدیل میکند خطی ست. انتظار میرود این تبدیل حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری، ادغام، و حاصل- ِ-ضرب ِ اسکالر را حفظ کند، و اسکالرها را تغییر ندهد. به این ترتیب کافی ست اثر ِ این تبدیل بر بردارها معلوم شود. W را بردار (چاربردار) میگیرم. تبدیل ِ متناظر با چاربردارها را با $\mathfrak{L}$ نشان میدهم:

$$\tilde{W} = \mathfrak{L}\, W. \tag{22}$$

$\mathfrak{L}$ قرار است حاصل- ِ-ضرب ِ درونی (و در نتیجه طول) را حفظ کند. پس یک تبدیل ِ لُرِنتس [4] است. u هم چاربردار است. پس،

$$\tilde{u} = \mathfrak{L}\, u. \tag{23}$$

خیز ِ متناظر با سرعت ِ $\mathfrak{v}$ را با $\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$، و چاربردار ِ سرعت متناظر با سکون را با e_0 نشان میدهم:

$$(e_0)^\alpha = \delta_0^\alpha. \tag{24}$$

$$u = [\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]\, e_0. \tag{25}$$

برا یِ تعیین ِ $\mathfrak{L}$ فرضها یی لازم است. چنین میگیرم که $\mathfrak{L}$ وقت ی $\boldsymbol{v}$ صفر باشد یک خیز است (دوران ندارد)، و در حالت ِ کلی با $[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]$، خیز ی که e_0 را به u تبدیل میکند، سازگار است. فرض ِ اول از اینجا موجه میشود که در حالت ِ سکون هیچ دوران ی ممتاز نیست. فرض ِ دوم هم در واقع اعمال ِ تقارن تحت ِ خیز است.

این که $\mathfrak{L}$ برا یِ سرعت ِ صفر خیز است، یعنی

$$\tilde{W}_{\mathrm{r}} = [\mathfrak{B}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}})]\, W_{\mathrm{r}}. \tag{26}$$

شاخص ِ r متناظر با سکون است. سازگاری یِ $\mathfrak{L}$ با $[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]$ یعنی اگر تانسرها یِ متناظر با سکون را با $[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]$ بخیزانم، تغییرات ِ این تانسُرها هم با $[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]$ خیزانده میشود. پس اگر

$$W = [\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]\, W_{\mathrm{r}}, \tag{27}$$

آنگاه،

$$\delta\, W = [\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]\, \delta\, W_{\mathrm{r}}. \tag{28}$$

از (26) تا (28) نتیجه میشود

$$\mathfrak{L} = [\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]\, [\mathfrak{B}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}})]\, [\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]^{-1}. \tag{29}$$

از این، همراه با (23) و (25)، دیده میشود

$$[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v}_{\rm r})]\, e_0 = [\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]^{-1}\, [\mathfrak{B}(\tilde{\boldsymbol{v}})]\, e_0. \tag{30}$$

وقت ی $(\delta\, \boldsymbol{v})$ صفر شود $\boldsymbol{v}_{\rm r}$ هم صفر میشود، و $\mathfrak{L}$ همانی میشود. $\mathfrak{l}$ را خطی نسبت به $(\delta\, \boldsymbol{v})$ تعریف میکنم، چنان که

$$\mathfrak{L} = 1 + \mathfrak{l} + o(\delta\, \boldsymbol{v}). \tag{31}$$

با استفاده از

$$[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]^0{}_0 = \gamma, \tag{32}$$

$$[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]^0{}_i = c^{-2}\, \gamma\, v_i, \tag{33}$$

$$[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]^i{}_0 = \gamma\, v^i, \tag{34}$$

$$[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma - 1}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}\, v^i\, v_j, \tag{35}$$

نتیجه میشود

$$\{[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v}_{\rm r})]\, e_0\}^0 = 1 + o(\delta\, \boldsymbol{v}). \tag{36}$$

$$\{[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v}_{\rm r})]\, e_0\}^i = (v_{\rm r})^i + o(\delta\, \boldsymbol{v}). \tag{37}$$

$$\{[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]^{-1}\, [\mathfrak{B}(\tilde{\boldsymbol{v}})]\, e_0\}^0 = 1 + o(\delta\, \boldsymbol{v}). \tag{38}$$

$$\{[\mathfrak{B}(\boldsymbol{v})]^{-1}\, [\mathfrak{B}(\tilde{\boldsymbol{v}})]\, e_0\}^i = \gamma\, \left[\delta\, v^i + \frac{\gamma - 1}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}\, v^i\, (\boldsymbol{v}\cdot\delta\, \boldsymbol{v})\right] + o(\delta\, \boldsymbol{v}). \tag{39}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{v}_{\rm r} = \gamma\, \left[\delta\, \boldsymbol{v} + \frac{\gamma - 1}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}\, \boldsymbol{v}\, (\boldsymbol{v}\cdot\delta\, \boldsymbol{v})\right] + o(\delta\, \boldsymbol{v}). \tag{40}$$

از اینجا،

$$\mathfrak{l}^0{}_0 = 0. \tag{41}$$

$$\mathfrak{l}^0{}_i = c^{-2}\,\gamma^2\,\delta\,v_i. \tag{42}$$

$$\mathfrak{l}^i{}_0 = \gamma^2\,\delta\,v^i. \tag{43}$$

$$\mathfrak{l}^i{}_j = c^{-2}\,\gamma^2\,(v^i\,\delta\,v_j - v_j\,\delta\,v^i). \tag{44}$$

از

$$\delta\,v^j = \gamma^{-1}\,\delta\,u^j - \gamma^{-2}\,u^j\,\delta\,\gamma, \tag{45}$$

یا هم-ارز با آن

$$\delta\,v^j = c^{-2}\,\gamma^{-2}\,(u^j\,\delta\,u_0 - u_0\,\delta\,u^j), \tag{46}$$

همراه با (41) تا (44) نتیجه میشود

$$\mathfrak{l}^\alpha{}_\beta = c^{-2}\,(u^\alpha\,\delta\,u_\beta - u_\beta\,\delta\,u^\alpha). \tag{47}$$

به این ترتیب،

$$\delta\,W = c^{-2}\,[u\,(W\cdot\delta\,u) - (u\cdot W)\,\delta\,u]. \tag{48}$$

این هم ان انتقالِ فِرمی-واکِر [6] برایِ W است. ($\delta_{\mathrm{FW}}\,W$) را چنین تعریف میکنم.

$$\delta_{\mathrm{FW}}\,W = \delta\,W + \frac{u\,(W\cdot\delta\,u) - (u\cdot W)\,\delta\,u}{u\cdot u}. \tag{49}$$

انتقالِ فِرمی-واکِر [6] این است که δ_{FW} صفر شود، مثلَن [7]. دیده میشود (48) هم-ارز است با

$$\delta_{\mathrm{FW}}\,W = 0. \tag{50}$$

با استفاده از (14)، رابطه یِ (48) را میشود به شکل ِ مشتق ِ W نسبت به $\boldsymbol{v}$ نوشت:

$$\frac{\partial W^\alpha}{\partial v^i} = c^{-2}\,\gamma\,[u^\alpha\,W_i - \delta^\alpha_i\,(u\cdot W)]. \tag{51}$$

از جمله دیده میشود

$$\begin{aligned}-v^i\,\frac{\partial W^\alpha}{\partial v^i} &= c^{-2}\,[-u^\alpha\,u_i\,W^i + \delta^\alpha_i\,u^i\,(u\cdot W)],\\ &= c^{-2}\,[u^\alpha\,u_0\,W^0 - u^\alpha\,(u\cdot W) - \delta^\alpha_0\,u^0\,(u\cdot W) + u^\alpha\,(u\cdot W)]. \end{aligned}\tag{52}$$

که نتیجه میدهد

$$-v^i\,\frac{\partial W^\alpha}{\partial v^i} = c^{-2}\,\gamma\,[u^\alpha\,W_0 - \delta^\alpha_0\,(u\cdot W)]. \tag{53}$$

1.3 تکانه و انرژی

مثلفِها یِ فضایی و زمانی یِ تکانه چنین َند.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}. \tag{54}$$

$$p_0 = L - p_i\,v^i. \tag{55}$$

به این ترتیب،

$$p_i = \mathfrak{m}\,\gamma\,v_i - c^2\,\gamma^{-1}\,\left(\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial u^\beta}\,\frac{\partial u^\beta}{\partial v^i} + \frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial W^\beta}\,\frac{\partial W^\beta}{\partial v^i}\right). \tag{56}$$

$$p_0 = -\mathfrak{m}\,\gamma\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + c^2\,\gamma^{-1}\,\left(\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial u^\beta}\,\frac{\partial u^\beta}{\partial v^i} + \frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial W^\beta}\,\frac{\partial W^\beta}{\partial v^i}\right)\,v^i - \mathfrak{m}\,c^2\,\gamma^{-1}. \tag{57}$$

با استفاده از (14) و (16) و (51) و (53)، اینها میشوند

$$p_\alpha = \mathfrak{m}\,u_\alpha - \frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial u^\beta}\,(c^2\,\delta^\beta_\alpha + u^\beta\,u_\alpha) + \frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial W^\beta}\,[(u\cdot W)\,\delta^\beta_\alpha - u^\beta\,W_\alpha]. \tag{58}$$

به مجموع ِ دُ-جمله یِ اول ِ طرف ِ راست تکانه یِ آشکار، و به جمله یِ سوم ِ طرف ِ راست تکانه یِ نهان میگویم. اگر ساختار تانسر ی با رتبه یِ بیش از یک باشد (بیش از یک شاخص داشته باشد)،

متناظر با هر شاخص ِ آن یک جمله شبیه ِ جمله ی ِ سوم ِ طرف ِ راست ظاهر میشود. مثلَن متناظر با ساختار ِ دُ-شاخصی ی ِ $\mathfrak{W}$،

$$\frac{\partial\,\mathfrak{m}}{\partial\,W^\beta}\,[(u\cdot W)\,\delta_\alpha^\beta - u^\beta\,W_\alpha] \to \frac{\partial\,\mathfrak{m}}{\partial\,\mathfrak{W}^{\mu\,\nu}}\,(u^\sigma\,\mathfrak{W}_\sigma{}^\nu\,\delta_\alpha^\mu - u^\mu\,\mathfrak{W}_\alpha{}^\nu + u^\sigma\,\mathfrak{W}^\mu{}_\sigma\,\delta_\alpha^\nu - u^\nu\,\mathfrak{W}^\mu{}_\alpha). \tag{59}$$

2 معادله ی ِ حرکت

معادله ی ِ حرکت

$$\mathcal{E}_\alpha = 0 \tag{60}$$

است، که

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{\partial\,L}{\partial\,r^\alpha} - \frac{\mathrm{d}\,p_\alpha}{\mathrm{d}\,t}, \tag{61}$$

یا، با استفاده از (10)،

$$\gamma\,\mathcal{E}_\alpha = -c^2\,\frac{\partial\,\mathfrak{m}}{\partial\,T}\,\frac{\partial\,T}{\partial\,r^\alpha} - \frac{\mathrm{d}\,p_\alpha}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{62}$$

3 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «یک ذره ی ِ نسبیتی در یک میدان ِ اسکالر» (X1-071 (2010/10/21

[2] محمد خرمی؛ «یک ذره ی ِ نسبیتی در میدانها ی ِ خارجی» (X1-091 (2013/04/25

[3] Minkowski

[4] Lorentz

[5] Poincaré

[6] Fermi-Walker

[7] Wolfgang Rindler; "relativity: special, general, and cosmological" 2nd edition (Oxford University Press, 2006) chapter 10