X1-143 (2019/10/21)

مسئله یِ دیریکله برا یِ قرص، با استفاده از نگاشت ِ همدیس

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

این مسئله یِ شرط- ِ-مرزی برا یِ قرص بررسی میشود که پتانسیل درون ِ قرص معادله یِ لَپلَس [1] را بر میئاورَد و مرز ِ قرص اجتماع ِ دُ کمان است که بر هر یک پتانسیل ثابت است. با استفاده از جواب ِ این مسئله، جواب ِ مسئله یِ دیریکله [2] برا یِ معادله یِ لَپلَس [1] بر قرص به دست میئاید.

0 طرح ِ مسئله

تابع ِ ψ درون ِ یک قرص به شعاع ِ a معادله یِ لَپلَس [1] را بر میئاورَد. ψ بر مرز ِ قرص داده شده:

$$(\boldsymbol{\nabla}^2\,\psi)(z)=0,\qquad z\in\mathbb{D}. \tag{1}$$

$$\psi(z)=f(z),\quad z\in(\partial\,\mathbb{D}). \tag{2}$$

$\mathbb{D}$ یک قرص به شعاع ِ a، و $(\partial\,\mathbb{D})$ مرز ِ آن است. f معلوم است. هدف محاسبه یِ ψ درون ِ قرص است. مرکز ِ قرص را مبدئ میگیرم و z (یک بردار ِ دُ-بُعدی، یا هم-ارز با آن یک متغیر ِ مختلط) را

با مختصات ِ استوانِئی، (ρ, ϕ) نشان میدهم. $f(z)$، با z در $(\partial\,\mathbb{D})$، را هم با $F(\phi)$ نشان میدهم:

$$f(a, \phi) = F(\phi). \tag{3}$$

از خطی-بودن ِ ψ نسبت به f دیده میشود یک تابع ِ G هست که

$$\psi(\rho, \phi) = \int_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\,\phi'\,G(\rho, \phi, \phi')\,F(\phi'), \tag{4}$$

پس هدف محاسبه یِ G است.

1 پتانسیل ی که بر یک کمان یک و بر بقیه یِ مرز صفر است

Ψ را تابع ی تعریف میکنم که درون ِ قرص معادله یِ لَپلَس [1] را بر میئاورَد و

$$\Psi(a, \phi) = \begin{cases} 1, & \phi \in (\alpha_1, \alpha_2) \\ 0, & \phi \notin (\alpha_1, \alpha_2) \end{cases}. \tag{5}$$

البته زاویِها یِ α_1 و α_2 یا حد ِ یک مضرب ِ صحیح از $(2\,\pi)$ تعریف شده اند. انتخاب میکنم

$$0 < (\alpha_2 - \alpha_1) < 2\,\pi. \tag{6}$$

یک راه ِ محاسبه یِ Ψ این است که نگاشت ِ همدیس ی بیابم که قرص را به ناحیه ای سادِتر تبدیل کند: ناحیه ای که حل ِ معادله یِ لَپلَس [1] در آن سادِتر باشد (مثلَن فصلها یِ 9 و 10 از [3]) . نگاشت ِ h را به کار میبَرم:

$$h(z) = \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)\,\frac{z\,\exp(-\mathrm{i}\,\alpha_1) - R}{z\,\exp(-\mathrm{i}\,\alpha_2) - R}. \tag{7}$$

دیده میشود این نگاشت قرص را به نیم-صفحه یِ پایین مینگارد، چنان که کمان ی که Ψ بر آن یک است به نیم-خط ِ حقیقی یِ منفی، و کمان ی که Ψ بر آن صفر است به نیم-خط ِ حقیقی یِ مثبت نگاشته میشود. به این ترتیب،

$$\Psi = -\frac{1}{\pi}\,\arg[h(z)], \tag{8}$$

که arg زاویه است، و شاخه ای از آن به کار رفته که در $(-\pi, \pi)$ مقدار میگیرد. دیده میشود

$$h(z) = \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)\,\frac{[z\,\exp(-\mathrm{i}\,\alpha_1) - R]\,[\bar{z}\,\exp(\mathrm{i}\,\alpha_2) - R]}{|z\,\exp(-\mathrm{i}\,\alpha_2) - R|^2}, \tag{9}$$

که نتیجه میدهد

$$\arg[h(z)] = \theta + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}. \tag{10}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\rho^2\,\sin(\alpha_2 - \alpha_1) - R\,\rho\,[\sin(\phi - \alpha_1) - \sin(\phi - \alpha_2)]}{\rho^2\,\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - R\,\rho\,[\cos(\phi - \alpha_1) + \cos(\phi - \alpha_2)] + R^2}. \tag{11}$$

2 حدِ کمان- ِ-کوچک

وقت ی $(\alpha_2 - \alpha_1)$ کوچک است (یعنی کمان ی که پتانسیل بر آن ناصفر است کوچک است)، (10) ساده میشود: α و $\Delta\,\alpha$ را چنین تعریف میکنم.

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}. \tag{12}$$

$$\Delta\,\alpha = \alpha_2 - \alpha_1. \tag{13}$$

به این ترتیب،

$$\theta = \frac{\rho^2 - R\,\rho\,\cos(\phi - \alpha)}{R^2 + \rho^2 - 2\,R\,\rho\,\cos(\phi - \alpha)}\,\Delta\,\alpha + o(\Delta\,\alpha). \tag{14}$$

$$\arg[h(z)] = -\frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\,R\,\rho\,\cos(\phi - \alpha)}\,\frac{\Delta\,\alpha}{2} + o(\Delta\,\alpha). \tag{15}$$

3 مسئله یِ کلی

مسئله یِ کلی را میشود با این تقریب کرد که پتانسیل تکئی-ثابت است، مقدار ِ پتانسیل بر کمان ِ I_j برابر با F_j است. نتیجه میشود

$$\psi(\rho, \phi) = \frac{1}{2\,\pi}\,\sum_j \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\,R\,\rho\,\cos(\phi - \phi'_j)}\,F_j\,(\Delta\,\phi')_j + o(1). \tag{16}$$

ϕ'_j وسط ِ کمان ِ j، و $(\Delta\,\phi')_j$ پهنا یِ کمان ِ j است. در حد ی که پهناها به صفر بگرایند، طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا به یک انتگرال تبدیل میشود:

$$\psi(\rho,\phi)=\frac{1}{2\,\pi}\int \mathrm{d}\,\phi'\,\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2\,R\,\rho\,\cos(\phi-\phi')}\,F(\phi'). \tag{17}$$

به این ترتیب،

$$G(\rho,\phi,\phi')=\frac{1}{2\,\pi}\,\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2\,R\,\rho\,\cos(\phi-\phi')}. \tag{18}$$

این هم ان است که در مثلَن فصل ِ 12 از [3] به دست آمده.

4 پانوشتها

[1] Laplace

[2] Dirichlet

[3] James Ward Brown & Ruel V. Churchill; “Complez variables and applications” 6th edition (McGraw-Hill, 1996)