X1-145 (2020/01/28)

پیشروی یِ محور ِ زمین به خاطر ِ ماه و خُرشید

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

پیشروی یِ محور ِ قطبی یِ زمین به خاطر ِ ماه و خُرشید بررسی میشود، با در-نظر-گرفتن ِ این که صفحه یِ مدار ِ ماه دُر ِ زمین با صفحه یِ مدار ِ زمین دُر ِ خُرشید زاویه میسازد.

0 طرح ِ مسئله

زمین نقطِئی نیست و تُزیع- ِ-جرم َ ش هم کروی-متقارن نیست. به هم ین خاطر انرژی یِ پتانسیل ِ زمین در میدان ِ گرانشی یِ هر جسم ِ دیگر ی، علاوه بر انرژی یِ پتانسیل متناظر با زمین ِ نقطِئی یک جمله یِ دیگر هم دارد که به جهت ِ محورها یِ چسبیده-به-زمین بستِگی دارد. این جمله یِ ناهمسانگرد در انرژی یِ پتانسیل، یک گشتاور میسازد که زمین را میچرخانَد. اگر بردار ِ مکان ِ زمین نسبت به مرکز ِ نیرو یِ گرانش ِ وارد بر آن وابسته-به-زمان باشد، بخش ِ ناهمسانگرد ِ انرژی-یِ-پتانسیل هم وابسته-به-زمان است. اما اگر چرخش ِ زمین به خاطر ِ این بخش ِ ناهمسانگرد، در مقایسه با زمانها یِ نُعی یِ حرکت ِ نسبی یِ زمین و مرکز ِ گرانش کند باشد، میشود به جا یِ آن انرژی-یِ-پتانسیل ِ وابسته-به-زمان میانگین ِ زمانی یِ آن را به کار برد. مهمترین جرمها یی که بخش ِ ناهمسانگرد ِ گرانش ِ شان زمین را میچرخانَد، ماه و خُرشید َند. زمانها یِ متناظر با حرکات ِ ماه و زمین نسبت به هم

1 ماه (دُوره یِ گردش ِ ماه دُر ِ زمین)، 9 سال (دُوره یِ پیشروی یِ حضیض ِ مدار ِ ماه دُر ِ زمین)، و 19 سال (دُره یِ پیشروی یِ محور ِ عمود بر مدار ِ ماه دُر ِ زمین) است. زمان ِ متناظر با حرکت ِ زمین و خُرشید نسبت به هم 1 سال (دُوره یِ مدار ِ زمین دُر ِ خُرشید) است. همه یِ اینها از دُره یِ چرخش ِ زمین به خاطر ِ بخش ِ ناهمسانگرد ِ انرژی یِ پتانسیل ِ گرانشی بسیار کوچکتر َند. این دُره، چنان که در ادامه دیده خاهد شد، چند-ده-هزار سال است. پس میشود به جا یِ بخش ِ ناهمسانگرد ِ انرژی یِ پتانسیل ِ گرانشی، میانگین ِ زمانی یِ آن را به کار برد.

به علاوه، زمین هر چند کروی-متقارن نیست تقریبَن سمتی-متقارن است: تُزیع-ِ-جرم ِ آن تحت ِ چرخش دُر ِ محور ِ قطبی تغییر نمیکند. حتا اگر چنین نمیبود، چون دُوره یِ چرخش ِ زمین دُر ِ محور ِ قطبی یِ َش 1 روز است، که بسیار کمتر از چند-ده-هزار-سال است، میشد به جا یِ تُزیع-ِ-جرم ِ زمین میانگین ِ این تُزیع طی ِ یک دُره یِ چرخش را به کار برد. به این ترتیب، بخش ِ ناهمسانگرد ِ انرژی یِ پتانسیل ِ گرانشی عملَن به فقط جهت ِ محور ِ قطبی یِ زمین بستِگی دارد، و از این جهت هم فقط θ، زاویه یِ این محور با عمود بر صفحه یِ مدار ِ زمین دُر ِ خرشید، مهم است.

هدف محاسبه یِ میانگین ِ بخش ِ ناهمسانگرد ِ انرژی یِ پتانسیل ِ گرانشی، و سپس گشتاور ِ حاصل از آن، و در نهایت محاسبه یِ آهنگ ِ چرخش ِ زمین به خاطر ِ این گشتاور است.

1 زمین در میدان ِ گرانشی یِ یک جسم

زمین در میدان ِ گرانشی یِ جسم ی به جرم ِ M است. بردار ِ مکان ِ جسم نسبت به مرکز-ِ-جرم ِ زمین را با $\boldsymbol{r}$ نشان میدهم. U، انرژی یِ پتانسیل ِ زمین در میدان ِ گرانشی یِ این جسم، چنین میشود.

$$U = -G\,M\int\frac{\mathrm{d}^3\,r'\,\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{1}$$

ρ چگالی یِ جرم ِ زمین است. وقت ی جسم ِ گرانش-ساز دور از زمین است، اگر $\boldsymbol{r}'$ درون ِ زمین باشد r' بسیار کوچکتر از r است. پس،

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r'^{l}}{r^{l+1}}\,\mathrm{P}_l(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}'). \tag{2}$$

P چندجمله‌ئی ی لژاندر [1] است. جمله ی $l=1$ در طرف ِ راست چنین است.

$$\frac{r'}{r^2}\,\mathrm{P}_1(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}')=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^3}. \tag{3}$$

چون مبدئ مرکز- ِ-جرم ِ زمین گرفته شده،

$$\int \mathrm{d}^3\,r'\,\boldsymbol{r}'\,\rho(\boldsymbol{r}')=0. \tag{4}$$

پس جمله ی $l=1$ در طرف ِ راست ِ (2)، در انتگرال ِ طرف ِ راست ِ (1) سهم ندارد.

$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ را یک کنج ِ یکه-متعامد ِ راستگرد میگیرم و زاویها ی مختصات ِ قطبی نسبت به آن را با (α,β) نشان میدهم.

$$\mathrm{P}_l(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}')=\frac{4\,\pi}{2\,l+1}\sum_{m=-l}^{l}\overline{\mathrm{Y}_{l\,m}(\alpha,\beta)}\,\mathrm{Y}_{l\,m}(\alpha',\beta'). \tag{5}$$

Y هماهنگ ِ کروی ست. اگر ρ نسبت به $\boldsymbol{e}_3$ سمتی-متقارن باشد، یعنی $\rho(r',\alpha',\beta')$ مستقل از β' باشد، در طرف ِ راست ِ (1) انتگرال ِ همه ی جملات ِ شامل ِ $\mathrm{Y}_{l\,m}(\alpha',\beta')$ بر β' صفر میشود، مگر m صفر باشد. پس، از جملات ِ طرف ِ راست ِ (5) فقط جمله ی $m=0$ در طرف ِ راست ِ (1) سهم دارد. به این ترتیب، با استفاده از

$$\frac{4\,\pi}{2\,l+1}\,\overline{\mathrm{Y}_{l\,0}(\alpha,\beta)}\,\mathrm{Y}_{l\,0}(\alpha',\beta')=\mathrm{P}_l(\cos\alpha)\,\mathrm{P}_l(\cos\alpha') \tag{6}$$

و روابط ِ قبلی،

$$U=-\frac{G\,M\,M_{\mathrm{E}}}{r}+U_{\mathrm{a}}, \tag{7}$$

که M_{E} جرم ِ زمین و U_{a} بخش ِ ناهمسانگرد ِ انرژی ی پتانسیل است:

$$U_{\mathrm{a}}=-\frac{G\,M}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\mathrm{P}_l(\cos\alpha)}{r^l}\int \mathrm{d}^3\,r'\,r'^l\,\mathrm{P}_l(\cos\alpha')\,\rho(\boldsymbol{r}'). \tag{8}$$

وقت ی فاصله ی جسم تا زمین خیل ی بزرگتر از اندازه ی زمین است، مهمترین جمله در طرف ِ راست ِ (8) بالا جمله ی $l=2$ است. طرف ِ راست ِ (8) را با هم ین جمله تقریب میکنم. از

$$r'^2\,\mathrm{P}_2(\cos\alpha')=\frac{3\,(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{r}')^2-r'^2}{2}, \tag{9}$$

نتیجه میشود

$$\int \mathrm{d}^3\, r'\, r'^2\, \mathrm{P}_2(\cos\alpha')\, \rho(\boldsymbol{r}') = \frac{I_1 + I_2 - 2\, I_3}{2}, \tag{10}$$

که I_j لختی یِ دورانی یِ زمین حُل ِ $\boldsymbol{e}_j$ است. تقارن ِ سمتی حُل ِ $\boldsymbol{e}_3$ نتیجه میدهد

$$I_2 = I_1. \tag{11}$$

به این ترتیب،

$$U_\mathrm{a} = \frac{G\, M}{r^3}\, (I_3 - I_1)\, \mathrm{P}_2(\cos\alpha), \tag{12}$$

که R شعاع ِ زمین است. اینجا $\boldsymbol{e}_3$ هم ان محور ِ قطبی یِ زمین است، چون ρ نسبت به محور ِ قطبی یِ زمین است که سمتی-متقارن است. به این ترتیب α زاویه یِ $\boldsymbol{r}$ با محور ِ قطبی یِ زمین است.

2 میانگین ِ مداری

زاویه یِ $\boldsymbol{r}$ با محور ِ قطبی یِ زمین ثابت نیست. گیرم $\boldsymbol{r}$ بر یک صفحه (Π) حرکت میکند. بردار ِ یکه یِ عمود بر این صفحه را با $\boldsymbol{p}$، و زاویه یِ $\boldsymbol{e}_3$ با $\boldsymbol{p}$ را با γ نشان میدهم. دیده میشود

$$\cos\alpha = \sin\gamma\, \cos\chi, \tag{13}$$

که χ زاویه یِ تصویر ِ $\boldsymbol{e}_3$ بر Π با $\boldsymbol{r}$ است. گیرم $\boldsymbol{r}$ یکنواخت بر یک دایره حرکت میکند. در این صورت میانگین ِ مداری بر زمان هم ان میانگین ِ مداری بر χ است. به این ترتیب،

$$\mathsf{EX}_1[\cos^2\alpha)] = \frac{1}{2}\, \sin^2\gamma, \tag{14}$$

که $\mathsf{EX}_1(\mathfrak{X})$ میانگین ِ مداری یِ $\mathfrak{X}$ بر زمان است. با استفاده از رابطه یِ بالا و

$$\mathrm{P}_2(\mathfrak{x}) = \frac{3\, \mathfrak{x}^2 - 1}{2}, \tag{15}$$

نتیجه میشود

$$\mathsf{EX}_1[\mathrm{P}_2(\cos\alpha)] = -\frac{1}{2}\, \mathrm{P}_2(\cos\gamma), \tag{16}$$

یا

$$\mathsf{EX}_1(U_\mathrm{a}) = \frac{G\,M}{r^3}\,(I_3 - I_1)\,\left[-\frac{\mathrm{P}_2(\cos\gamma)}{2}\right]. \tag{17}$$

3 میانگین بر تغییر ِ مدار

مدار ِ ماه دُر ِ زمین ثابت نیست. از جمله بردار ِ عمود بر صفحه یِ مدار ِ ماه دُر ِ زمین، دُر ِ بردار ِ عمود بر صفحه یِ مدار ِ زمین دُر ِ خُرشید میچرخد. این یعنی در (17) برا یِ ماه، γ ثابت نیست. گیرم $\boldsymbol{n}$ یک بردار ِ یکه یِ ثابت است که $\boldsymbol{p}$ دُر ِ آن میچرخد. زاویه یِ $\boldsymbol{p}$ با $\boldsymbol{n}$ را با η نشان میدهم. $\boldsymbol{e}_3$ را هم ثابت میگیرم و زاویه یِ آن با $\boldsymbol{n}$ را با θ نشان میدهم. در این صورت،

$$\cos\gamma = \cos\eta\,\cos\theta + \sin\eta\,\sin\theta\,\cos\psi, \tag{18}$$

که ψ زاویه یِ تصویر ِ $\boldsymbol{p}$ بر صفحه یِ عمود بر $\boldsymbol{n}$ با تصویر ِ $\boldsymbol{e}_3$ بر صفحه یِ عمود بر $\boldsymbol{n}$ است. گیرم چرخش ِ $\boldsymbol{p}$ دُر ِ $\boldsymbol{n}$ یکنواخت است. در این صورت میانگین بر تغییر ِ مدار هم ان میانگین بر ψ است. میانگین ِ $\mathfrak{X}$ بر مدار را با $\mathsf{EX}_2(\mathfrak{X})$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\mathsf{EX}_2[\mathrm{P}_2(\cos\gamma)] = \mathrm{P}_2(\cos\eta)\,\mathrm{P}_2(\cos\theta), \tag{19}$$

یا

$$\mathsf{EX}_2[\mathsf{EX}_1(U_\mathrm{a})] = \left[-\frac{\mathrm{P}_2(\cos\eta)}{2}\right]\,\frac{G\,M}{r^3}\,(I_3 - I_1)\,\mathrm{P}_2(\cos\theta). \tag{20}$$

$\boldsymbol{n}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر صفحه یِ مداری یِ زمین دُر ِ خُرشید است. θ (برا یِ زمین) تقریبَن 23.5° است. η زاویه یِ $\boldsymbol{p}$ با $\boldsymbol{n}$ است. این زاویه برا یِ خُرشید صفر، و برا یِ ماه تقریبَن 5° است (مثلَن [2]).

4 انرژی-یِ-پتانسیل ِ مئثر، گشتاور، و پیشروی

رابطه یِ (20) یک انرژی-یِ-پتانسیل ِ مئثر برا یِ زمین در (بخش ِ ناهمسانگرد ِ) میدان ِ گرانشی یِ یک جسم ِ دیگر میدهد. طرف ِ چپ ِ (20) را با U_eff نشان میدهم. این انرژی-یِ-پتانسیل یک

گشتاور به زمین وارد میکند، که آن را با $\boldsymbol{T}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{b}\,\frac{\partial\,U_{\rm eff}}{\partial\,\theta}, \tag{21}$$

که $\boldsymbol{b}$ یک بردار ِ یکه عمود بر $\boldsymbol{n}$ و $\boldsymbol{e}_3$ است، چنان که کنج ِ $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{b})$ راستگرد است:

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{b}\,\sin\theta. \tag{22}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_3\,\frac{\partial\,U_{\rm eff}}{\partial\,(\cos\theta)}, \tag{23}$$

یا،

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_3\,\left[-\frac{\mathrm{P}_2(\cos\eta)}{2}\right]\,\frac{G\,M}{r^3}\,(I_3 - I_1)\,(3\,\cos\theta). \tag{24}$$

این گشتاور $\boldsymbol{L}$ (تکانه یِ زاویِئی یِ ناشی از چرخش ِ زمین) را تغییر میدهد:

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{T}. \tag{25}$$

تغییر ِ $\boldsymbol{L}$ چنین است که $\boldsymbol{L}$ دُر ِ بردار ِ $\boldsymbol{n}$ میچرخد. اگر Ω (سرعت ِ زاویِئی یِ این چرخش) خیل ی کوچکتر از ω (سرعت ِ زاویِئی یِ چرخش ِ زمین دُر ِ $\boldsymbol{e}_3$) باشد، $\boldsymbol{L}$ عملَن هم ان است که از چرخش ِ زمین دُر ِ $\boldsymbol{e}_3$ میئاید:

$$\boldsymbol{L} = I_3\,\omega\,\boldsymbol{e}_3. \tag{26}$$

$$\dot{\boldsymbol{L}} = (\Omega\,\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{L}. \tag{27}$$

به این ترتیب،

$$\Omega = \left[-\frac{\mathrm{P}_2(\cos\eta)}{2}\right]\,\frac{G\,M}{r^3}\,\frac{I_3 - I_1}{I_3}\,\frac{3\,\cos\theta}{\omega}, \tag{28}$$

پارامترها یِ A و B را چنین معرفی میکنم.

$$A = \frac{3\,G\,M_{\mathrm{E}}\,\mathrm{y}}{4\,\pi\,\omega\,R^3}\,\frac{I_3 - I_1}{I_3}\,\cos\theta, \tag{29}$$

$$B = \frac{M}{M_{\mathrm{E}}}\,\left(\frac{R}{r}\right)^3\,\mathrm{P}_2(\cos\eta), \tag{30}$$

که R شعاع ِ زمین و y سال است. بر حسب ِ اینها،

$$\Omega = -B\,A\,\frac{2\,\pi}{\mathrm{y}}. \tag{31}$$

رُشن است که A تابع ِ مشخصات ِ فقط زمین است، در حال ی که B به مشخصات ِ جسم ی که زمین در میدان ِ گرانشی یِ آن است هم بستِگی دارد.

5 مقدارها یِ عددی

زمین پخ است، شعاع ِ قطبی یِ آن کمتر از شعاع ِ استوایی یِ آن است. گیرم چگالی یِ زمین در هر نقطه به فقط نسبت ِ فاصله یِ این نقطه تا مرکز ِ زمین به شعاع ِ زمین در جهت ِ این نقطه بستگی دارد. در این صورت،

$$\frac{I_3 - I_1}{I_3} = \frac{2\,R_{\mathrm{e}}^2 - (R_{\mathrm{e}}^2 + R_{\mathrm{p}}^2)}{2\,R_{\mathrm{e}}^2}, \tag{32}$$

که R_{e} شعاع ِ استوایی و R_{p} شعاع ِ قطبی یِ زمین است. اختلاف ِ این شعاعها خیل ی کوچکتر از هر کدام است. پس یک تقریب ِ خوب این است که

$$\frac{I_3 - I_1}{I_3} = \frac{R_{\mathrm{e}} - R_{\mathrm{p}}}{R}. \tag{33}$$

با مقدارها یِ عددی (از مثلَن [2]) برا یِ زمین، ماه (M)، و خُرشید (S)، نتیجه میشود

$$A = 0.49 \times 10^3. \tag{34}$$

$$B_{\mathrm{M}} = 5.55 \times 10^{-8}. \tag{35}$$

$$B_{\mathrm{S}} = 2.57 \times 10^{-8}. \tag{36}$$

از جمله دیده میشود اثر ِ ماه تقریبَن 2 برابر ِ اثر ِ خُرشید است. عملَن هم ماه هست و هم خُرشید، و (31) چنین میشود.

$$\Omega = -(B_\mathrm{M} + B_\mathrm{S})\, A\, \frac{2\,\pi}{y}. \tag{37}$$

از اینجا یک دُره برا یِ پیشروی یِ محور ِ قطبی یِ زمین (چرخش ِ $\boldsymbol{e}_3$ دُر ِ $\boldsymbol{n}$) به دست میئاید. این دُره را با T نشان میدهم:

$$T = \frac{y}{(B_\mathrm{M} + B_\mathrm{S})\, A}. \tag{38}$$

با عددها یِ بالا،

$$T = 25\,000\,\mathrm{y}. \tag{39}$$

مقدار یِ که برا یِ T به دست آمده (کم ی بیشتر از 25 000 سال) با مقدار ِ واقعی (کم ی کمتر از 26 000 سال) اندک ی تفاوت دارد. یک علت استفاده از تقریب ِ (33) است. دُ-طرف ِ این رابطه اندک ی با هم تفاوت دارند:

$$\frac{R_\mathrm{e} - R_\mathrm{p}}{R} = 3.35 \times 10^{-3}. \tag{40}$$

$$\frac{I_3 - I_1}{I_3} = 3.27 \times 10^{-3}. \tag{41}$$

استفاده از (41) به جا یِ (33) و (40)، به مقدار یِ برا یِ T مینجامد که کم ی کمتر از 26 000 سال است.

6 پانوشتها

[1] Legendre

[2] Kenneth R. Lang; "Astrophysical data: planets and stars" (Springer, 1992)