X1-146 (2020/02/21)

انتشارگر و کنشها یِ درجه-یِ-دُ

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

کلیترین کنش ِ درجه-یِ-دُ با لَگرانژی یِ مرتبه-یِ-یک بررسی میشود. انتشارگر ِ متناظر بر حسب ِ چند تابع ِ زمان نوشته میشود و معادلات ِ حاکم بر این تابعها به دست میئاید. به ویژه، برا یِ نوسانگر ِ هماهنگ شکل ِ صریح ِ انتشارگر به دست میئاید.

0 درامد

انتشارگر عنصر ِ ماتریسی یِ عملگر ِ تحول در پایه یِ مکان است:

$$G(\xi, x; \upsilon, y) = \langle x|U(\xi, \upsilon)|y\rangle, \qquad (1)$$

که $|\mathfrak{a}\rangle$ ویژه-بردار ِ مکان با ویژه-مقدار ِ $\mathfrak{a}$ است، G انتشارگر است، و $U(\xi, \upsilon)$ عملگر ِ تحول از زمان ِ υ تا زمان ِ ξ است. G این معادلات را بر میئاوَرَد.

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial\,[G(\xi, x; \upsilon, y)]}{\partial\,\xi} = \left[H\left(\xi, x, p = -\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial\,x}\right)\right]\,[G(\xi, x; \upsilon, y)]. \qquad (2)$$

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial\,[G(\xi, x; \upsilon, y)]}{\partial\,\upsilon} = -\left[H\left(\upsilon, y, p = \mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial\,y}\right)\right]\,[G(\xi, x; \upsilon, y)]. \qquad (3)$$

H هَمیلتنی ست. انتشارگر را میشود با انتگرال-ِ-مسیر به دست آورد:

$$G(\xi, x; \upsilon, y) = \int_{(x,y)} \mathrm{d}\, q \, \exp\left[-\frac{S(\xi, \upsilon; q)}{\mathrm{i}\, \hbar}\right], \tag{4}$$

که انتگرالگیری بر همه یِ مسیرها یی با زمان بین ِ υ و ξ است، که

$$q(\upsilon) = y. \tag{5}$$

$$q(\xi) = x. \tag{6}$$

$S(\xi, \upsilon; q)$ هم کنش ِ متناظر با مسیر ِ q با زمان بین ِ υ و ξ است.

مسیر ِ کلاسیک (جواب ِ معادله یِ کلاسیک ِ حرکت) مسیر ی ست که کنش را، با شرطها یِ (5) و (6)، فرینه میکند. مسیر ِ کلاسیک را با q_{cl} نشان میدهم. به این ترتیب،

$$S(\xi, \upsilon; q) = S(\xi, \upsilon; q_{\mathrm{cl}}) + [S''(\xi, \upsilon; q_{\mathrm{cl}})](\eta, \eta) + o(\eta^2), \tag{7}$$

که S'' مشتق ِ دوم ِ S نسبت به مسیر است و

$$\eta = q - q_{\mathrm{cl}}. \tag{8}$$

از اینجا به بعد کنش را (نسبت به مسیر) درجه یِ-دُ میگیرم. پس S'' مستقل از مسیر میشود و مشتقها یِ بعدی یِ کنش هم صفر میشوند. در نتیجه،

$$S(\xi, \upsilon; q) = S(\xi, \upsilon; q_{\mathrm{cl}}) + [S''(\xi, \upsilon)](\eta, \eta). \tag{9}$$

این را در (4) میگذارم. چون مسیر ِ کلاسیک هم (5) و (6) را برمیئاورَد،

$$\eta(\upsilon) = 0. \tag{10}$$

$$\eta(\xi) = 0. \tag{11}$$

به این ترتیب،

$$G(\xi, x; \upsilon, y) = \int_{(0,0)} \mathrm{d}\, \eta \, \exp\left\{-\frac{S(\xi, \upsilon; q_{\mathrm{cl}}) + [S''(\xi, \upsilon)](\eta, \eta)}{\mathrm{i}\, \hbar}\right\}. \tag{12}$$

این به کار رفته که یاکُبی یِ تغییر-ِ-متغیر از q به η همانی ست. $S(\xi,\upsilon;q_{\rm cl})$ مستقل از η است. $S''(\xi,\upsilon)$ هم مستقل از x و y است. پس،

$$G(\xi,x;\upsilon,y)=C(\xi,\upsilon)\,\exp\left[-\frac{S(\xi,\upsilon;q_{\rm cl})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right], \tag{13}$$

که

$$C(\xi,\upsilon)=\int_{(0,0)}\mathrm{d}\,\eta\,\exp\left\{-\frac{[S''(\xi,\upsilon)](\eta,\eta)}{\mathrm{i}\,\hbar}\right\}. \tag{14}$$

اینها را میشود در مثلَن [1] یافت.

کنش درجه-یِ-دُ ست، در نتیجه معادله یِ حرکت خطی ست. پس $q_{\rm cl}$ نسبت به x و y خطی ست. $S(\xi,\upsilon;q_{\rm cl})$ نسبت به $q_{\rm cl}$ درجه-یِ-دُ ست. پس $S(\xi,\upsilon;q_{\rm cl})$ نسبت به x و y درجه-یِ-دُ ست.

1 لَگرانژی، هَمیلتنی، و انتشارگر

لَگرانژی یِ متناظر با کنش را با L نشان میدهم و آن را مرتبه-یِ-یک میگیرم. این که کنش درجه-یِ-دُ و لَگرانژی مرتبه-یِ-یک است، یعنی

$$L=\frac{m\,\dot x^2}{2}+a\,x\,\dot x-\frac{\kappa\,x^2}{2}+b\,\dot x+\phi\,x+\sigma, \tag{15}$$

که $\dot{\mathfrak{a}}$ مشتق ِ (کامل ِ) $\mathfrak{a}$ نسبت به t (زمان) است. البته این لَگرانژی را میشود چنین نوشت.

$$L=\tilde L+\dot\Lambda, \tag{16}$$

که

$$\tilde L=\frac{m\,\dot x^2}{2}-\frac{k\,x^2}{2}+f\,x. \tag{17}$$

$$\Lambda=\frac{a\,x^2}{2}+b\,x+s. \tag{18}$$

$$k=\kappa+\dot a. \tag{19}$$

$$f=\phi-\dot b. \tag{20}$$

$$\dot s=\sigma. \tag{21}$$

هَمیلتنی هم چنین میشود.

$$H = \frac{(p - a\,x - b)^2}{2\,m} + \frac{\kappa\,x^2}{2} - \phi\,x - \sigma, \tag{22}$$

که p تکانه است. معادله یِ تحول برا یِ تابع- ـِمُج ـِ ψ چنین است.

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,t} = \left[H\left(t, x, p = -\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial\,x}\right)\right]\,\psi. \tag{23}$$

تابع ـِ $\tilde{\psi}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\psi = \left[\exp\left(-\frac{\Lambda}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)\right]\,\tilde{\psi}. \tag{24}$$

این تعریف، یک تبدیل ـِ پیمانِئی ست. دیده میشود

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\,\tilde{\psi}}{\partial\,t} = \left[\tilde{H}\left(t, x, p = -\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial\,x}\right)\right]\,\tilde{\psi}, \tag{25}$$

که

$$\tilde{H}(t, x, p) = H\left(t, x, p + \frac{\partial\,\Lambda}{\partial\,x}\right) + \frac{\partial\,\Lambda}{\partial\,t}. \tag{26}$$

به این ترتیب،

$$\tilde{H} = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{k\,x^2}{2} - f\,x. \tag{27}$$

یعنی $\tilde{H}$ هَمیلتنی یی ست که از $\tilde{L}$ ساخته میشود. متناظر با $\tilde{L}$ هم کنش ـِ $\tilde{S}$ و انتشارگر ـِ $\tilde{G}$ ساخته میشود، که

$$G(\xi, x; \upsilon, y) = \left\{\exp\left[-\frac{\Lambda(\xi, x) - \Lambda(\upsilon, y)}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}\,\tilde{G}(\xi, x; \upsilon, y). \tag{28}$$

و البته $\tilde{G}$ مانسته یِ روابط ـِ (2) و (3) را، با $\tilde{H}$ به جا یِ H، برمیئاورَد.

2 معادلات ِ حاکم بر انتشارگر

مانسته ی ِ (13) برا ی ِ $\tilde{G}$، همراه با این که $\tilde{S}(\xi, \upsilon; q_{\mathrm{cl}})$ نسبت به x و y درجه-ی ِ-دُ ست، میشود

$$\tilde{G}(\xi, x; \upsilon, y) = \tilde{C}(\xi, \upsilon)\, \exp\bigg\{ -\frac{1}{\mathrm{i}\,\hbar}\, [x^2\, \tilde{A}_{1\,1}(\xi, \upsilon) + 2\, x\, y\, \tilde{A}_{1\,2}(\xi, \upsilon) + y^2\, \tilde{A}_{2\,2}(\xi, \upsilon) + x\, \tilde{B}_1(\xi, \upsilon) + y\, \tilde{B}_2(\xi, \upsilon)] \bigg\}. \tag{29}$$

مانستِها ی ِ (2) و (3)، به ترتیب، نتیجه میدهند

$$0 = \left(\frac{x^2}{2}\, \frac{\partial\, \tilde{A}_{1\,1}}{\partial\, \xi} + x\, y\, \frac{\partial\, A_{1\,2}}{\partial\, \xi} + \frac{y^2}{2}\, \frac{\partial\, \tilde{A}_{2\,2}}{\partial\, \xi} + x\, \frac{\partial\, \tilde{B}_1}{\partial\, \xi} + y\, \frac{\partial\, \tilde{B}_2}{\partial\, \xi} - \frac{\mathrm{i}\, \hbar}{\tilde{C}}\, \frac{\partial\, \tilde{C}}{\partial\, \xi} \right) + \frac{(\tilde{A}_{1\,1}\, x + \tilde{A}_{1\,2}\, y + \tilde{B}_1)^2 - \mathrm{i}\, \hbar\, \tilde{A}_{1\,1}}{2\, m(\xi)} + \frac{[k(\xi)]\, x^2}{2} - [f(\xi)]\, x. \tag{30}$$

$$0 = \left(\frac{x^2}{2}\, \frac{\partial\, \tilde{A}_{1\,1}}{\partial\, \upsilon} + x\, y\, \frac{\partial\, A_{1\,2}}{\partial\, \upsilon} + \frac{y^2}{2}\, \frac{\partial\, \tilde{A}_{2\,2}}{\partial\, \upsilon} + x\, \frac{\partial\, \tilde{B}_1}{\partial\, \upsilon} + y\, \frac{\partial\, \tilde{B}_2}{\partial\, \upsilon} - \frac{\mathrm{i}\, \hbar}{\tilde{C}}\, \frac{\partial\, \tilde{C}}{\partial\, \upsilon} \right) - \frac{(\tilde{A}_{2\,2}\, y + \tilde{A}_{1\,2}\, x + \tilde{B}_2)^2 - \mathrm{i}\, \hbar\, \tilde{A}_{2\,2}}{2\, m(\upsilon)} - \frac{[k(\upsilon)]\, y^2}{2} + [f(\upsilon)]\, y. \tag{31}$$

رابطه ی ِ (30) به این معادلات مینجامد.

$$0 = \frac{\partial\, \tilde{A}_{1\,1}}{\partial\, \xi} + \frac{(\tilde{A}_{1\,1})^2}{m(\xi)} + k(\xi). \tag{32}$$

$$0 = \frac{\partial\, \tilde{A}_{1\,2}}{\partial\, \xi} + \frac{\tilde{A}_{1\,1}\, \tilde{A}_{1\,2}}{m(\xi)}. \tag{33}$$

$$0 = \frac{\partial\, \tilde{A}_{2\,2}}{\partial\, \xi} + \frac{(\tilde{A}_{1\,2})^2}{m(\xi)}. \tag{34}$$

$$0 = \frac{\partial\, \tilde{B}_1}{\partial\, \xi} + \frac{\tilde{A}_{1\,1}\, \tilde{B}_1}{m(\xi)} - f(\xi). \tag{35}$$

$$0 = \frac{\partial\, \tilde{B}_2}{\partial\, \xi} + \frac{\tilde{A}_{1\,2}\, \tilde{B}_1}{m(\xi)}. \tag{36}$$

$$0 = -\frac{\mathrm{i}\, \hbar}{\tilde{C}}\, \frac{\partial\, \tilde{C}}{\partial\, \xi} + \frac{(\tilde{B}_1)^2 - \mathrm{i}\, \hbar\, \tilde{A}_{1\,1}}{2\, m(\xi)}. \tag{37}$$

رابطه یِ (31) هم میشود،

$$0=\frac{\partial\,\tilde A_{2\,2}}{\partial\,\upsilon}-\frac{(\tilde A_{2\,2})^2}{m(\upsilon)}-k(\upsilon). \tag{38}$$

$$0=\frac{\partial\,\tilde A_{1\,2}}{\partial\,\upsilon}-\frac{\tilde A_{2\,2}\,\tilde A_{1\,2}}{m(\upsilon)}. \tag{39}$$

$$0=\frac{\partial\,\tilde A_{1\,1}}{\partial\,\upsilon}-\frac{(\tilde A_{1\,2})^2}{m(\upsilon)}. \tag{40}$$

$$0=\frac{\partial\,\tilde B_2}{\partial\,\upsilon}-\frac{\tilde A_{2\,2}\,\tilde B_2}{m(\upsilon)}+f(\upsilon). \tag{41}$$

$$0=\frac{\partial\,\tilde B_1}{\partial\,\upsilon}-\frac{\tilde A_{1\,2}\,\tilde B_2}{m(\upsilon)}. \tag{42}$$

$$0=-\frac{\mathrm{i}\,\hbar}{\tilde C}\,\frac{\partial\,\tilde C}{\partial\,\upsilon}-\frac{(\tilde B_2)^2-\mathrm{i}\,\hbar\,\tilde A_{2\,2}}{2\,m(\upsilon)}. \tag{43}$$

برا ی به-دست-آوردن ِ این تابعها، یک دسته از معادلات ِ (32) تا (37) یا (38) تا (43)، همراه با شرایط ِ مرزی کافی ست. شرط ِ مرزی را میشود از انتشارگر وقت ی ξ به υ نزدیک است به دست آورد. در این حالت انتشارگر شبیه ِ انتشارگر ِ آزاد میشود:

$$\tilde G(\xi,x;\upsilon,y)=\left[\frac{m}{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\hbar\,(\xi-\upsilon)}\right]^{1/2}\,\left\{\exp\left[-\frac{m\,(x-y)^2}{2\,\mathrm{i}\,\hbar\,(\xi-\upsilon)}\right]\right\}\,(1+\cdots), \tag{44}$$

و البته در عبارت ِ غالب میشود m را در υ با ξ یا بین ِ این-دُ گذاشت. رابطه یِ (44) متناظر است با این شرایط ِ مرزی.

$$[(\xi-\upsilon)\,\tilde A_{1\,1}]\to m,\qquad \xi\to\upsilon. \tag{45}$$

$$[(\xi-\upsilon)\,\tilde A_{1\,2}]\to -m,\qquad \xi\to\upsilon. \tag{46}$$

$$[(\xi-\upsilon)\,\tilde A_{2\,2}]\to m,\qquad \xi\to\upsilon. \tag{47}$$

$$\tilde B_1\to 0,\qquad \xi\to\upsilon. \tag{48}$$

$$\tilde B_2\to 0,\qquad \xi\to\upsilon. \tag{49}$$

$$[(\xi-\upsilon)^{1/2}\,\tilde C]\to\left(\frac{m}{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\hbar}\right)^{1/2},\qquad \xi\to\upsilon. \tag{50}$$

3 انتشارگر برا یِ پارامترها یِ مستقل-از-زمان

وقت ی m و k و f ثابت باشند، حل ِ معادلات ساده میشود. ω و τ را چنین تعریف میکنم.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{51}$$

$$\tau = \xi - \upsilon. \tag{52}$$

از (32) نتیجه میشود

$$\tilde{A}_{1\,1} = m\,\omega\;\cot(\omega\,\tau - \mathfrak{b}), \tag{53}$$

که $\mathfrak{b}$ مستقل از ξ است. با رابطه یِ بالا و (45)، نتیجه میشود

$$\tilde{A}_{1\,1} = m\,\omega\;\cot(\omega\,\tau). \tag{54}$$

$\tilde{A}_{1\,1}$ را در (33) میگذارم. $\tilde{A}_{1\,2}$ به دست میئاید:

$$\tilde{A}_{1\,2} = \frac{\mathfrak{c}}{\sin(\omega\,\tau)}, \tag{55}$$

که $\mathfrak{c}$ مستقل از ξ است. با رابطه یِ بالا و (46)، نتیجه میشود

$$\tilde{A}_{1\,2} = -\frac{m\,\omega}{\sin(\omega\,\tau)}. \tag{56}$$

این و $\tilde{A}_{1\,1}$ را در (34) میگذارم. $\tilde{A}_{2\,2}$ به دست میئاید:

$$\tilde{A}_{2\,2} = m\,\omega\;\cot(\omega\,\tau) + \mathfrak{d}, \tag{57}$$

که $\mathfrak{d}$ مستقل از ξ است. با رابطه یِ بالا و (47)، نتیجه میشود

$$\tilde{A}_{2\,2} = m\,\omega\;\cot(\omega\,\tau). \tag{58}$$

$\tilde{A}_{1\,1}$ را در (35) میگذارم. $\tilde{B}_1$ به دست میئاید:

$$\tilde{B}_1 = \frac{f\,[\mathfrak{e} - \cos(\omega\,\tau)]}{\omega\;\sin(\omega\,\tau)}, \tag{59}$$

که $\mathfrak{e}$ مستقل از ξ است. با رابطه یِ بالا و (48)، نتیجه میشود

$$\tilde{B}_1 = \frac{f\,[1-\cos(\omega\,\tau)]}{\omega\,\sin(\omega\,\tau)}. \tag{60}$$

این و $\tilde{A}_{1\,2}$ را در (36) میگذارم. $\tilde{B}_2$ به دست میئاید:

$$\tilde{B}_2 = \frac{f\,[1-\cos(\omega\,\tau)]}{\omega\,\sin(\omega\,\tau)} + \mathfrak{f}, \tag{61}$$

که $\mathfrak{f}$ مستقل از ξ است. با رابطه یِ بالا و (49)، نتیجه میشود

$$\tilde{B}_2 = \frac{f\,[1-\cos(\omega\,\tau)]}{\omega\,\sin(\omega\,\tau)}. \tag{62}$$

سرانجام، $\tilde{A}_{1\,1}$ و $\tilde{B}_1$ را در (37) میگذارم. $\tilde{C}$ به دست میئاید:

$$\tilde{C} = \mathfrak{g}\,[\sin(\omega\,\tau)]^{-1/2}\,\exp\left\{\frac{f^2}{\mathrm{i}\,\hbar\,m\,\omega^3}\,\left[\frac{1-\cos(\omega\,\tau)}{\sin(\omega\,\tau)} - \frac{\omega\,\tau}{2}\right]\right\}, \tag{63}$$

که $\mathfrak{g}$ مستقل از ξ است. با رابطه یِ بالا و (50)، نتیجه میشود

$$\tilde{C} = \left[\frac{m\,\omega}{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\hbar\,\sin(\omega\,\tau)}\right]^{1/2}\,\exp\left\{\frac{f^2}{\mathrm{i}\,\hbar\,m\,\omega^3}\,\left[\frac{1-\cos(\omega\,\tau)}{\sin(\omega\,\tau)} - \frac{\omega\,\tau}{2}\right]\right\}. \tag{64}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\xi,x;\upsilon,y) = \left[\frac{m\,\omega}{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\hbar\,\sin(\omega\,\tau)}\right]^{1/2}\,\exp\Bigg(&-\frac{m\,\omega}{2\,\mathrm{i}\,\hbar\,\sin(\omega\,\tau)} \\ &\left\{\left[\left(x-\frac{f}{m\,\omega^2}\right)^2 + \left(y-\frac{f}{m\,\omega^2}\right)^2\right]\cos(\omega\,\tau)\right. \\ &\left. -\,2\left(x-\frac{f}{m\,\omega^2}\right)\left(y-\frac{f}{m\,\omega^2}\right)\right\} - \frac{f^2\,\tau}{2\,\mathrm{i}\,\hbar\,m\,\omega^2}\Bigg).\end{aligned} \tag{65}$$

و البته،

$$G(\xi,x;\upsilon,y) = \exp\left\{-\left[\frac{a\,(x^2-y^2)+2\,b\,(x-y)+2\,\sigma\,\tau}{2\,\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}\tilde{G}(\xi,x;\upsilon,y). \tag{66}$$

رابطه یِ (65) انتشارگر ِیک نوسانگر- ِهماهنگ با نیرو یِ ثابت ِ اضافی یِ f است.

4 پانوشت‌ها

[1] Ramamurti Shankar; “Principles of quantum mechanics” 2nd edition (Plenum press, 1994) chapter 8