X1-149 (2020/07/25)

نوسانها یِ غیر- ِ-خطی، اختلال، بازبهنجارش I

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

اثر ِ جملات ِ غیر- ِ-خطی بر حرکت ِ نوسانی، اختلالی بررسی میشود. بازبهنجارش و مفهوم ِ پارامترها یِ مئثر معرفی میشود.

0 درامد

معادله یِ حرکت برا یِ یک نوسانگر ِ هماهنگ ِ ساده چنین است.

$$\ddot{x} + k\,x = 0, \tag{1}$$

که $\dot{\mathfrak{x}}$ مشتق ِ $\mathfrak{x}$ نسبت به پارامتر (t) است، و k ثابت ی مثبت است. اسم ِ t را زمان میگذارم، هر چند رُشن است که این اسم-گذاری اثر ی در نتایج ندارد. جواب ِ این معادله میشود

$$x(t) = a_1\,\cos(\omega\,t) + a_2\,\sin(\omega\,t), \tag{2}$$

که a_1 و a_2 ثابتها یی دلبخاه َند و

$$\omega = \sqrt{k}. \tag{3}$$

البته میشود این جواب را چنین نوشت.

$$x(t) = a\,\cos(\omega\,t - \phi), \tag{4}$$

که (a, ϕ) مختصات ِ قطبی یِ متناظر با مختصات ِ دِکَرتی یِ (a_1, a_2) اند:

$$a_1 = a\,\cos\phi. \tag{5}$$

$$a_2 = a\,\sin\phi. \tag{6}$$

1 نوسانگر با جملات ِ غیر- ِ-خطی

معادله یِ حرکت برا یِ یک نوسانگر با جملات ِ غیر- ِ-خطی (یِ تابع- ِ-مکان) چنین است.

$$\ddot{x} + k\,x = f(x). \tag{7}$$

فرض میکنم f برا یِ متغیرها یِ کوچک با بسط- ِ-تیلِر َش برابر است. جمله یِ درجه-یِ-یک ِ f را میشود به طرف ِ چپ برد و در $(k\,x)$ جذب کرد. جمله یِ درجه-یِ-صفر ِ f هم با یک تغییر- ِ-متغیر (انتقال) در x حذف میشود. پس اولین جملات ِ نابدیهی جملات ِ درجه-یِ-دُ و درجه-یِ-سه اند:

$$\ddot{x} + k\,x = \alpha_2\,x^2 + \alpha_3\,x^3 + \cdots\,. \tag{8}$$

اگر دامنه یِ حرکت کوچک باشد، f کوچک میمانَد و میشود با آن مثل ِ یک اختلال رفتار کرد (مثلَن [1]). در این حالت f را با $(s\,f)$ جایگزین میکنم:

$$\ddot{x} + k\,x = s\,f(x), \tag{9}$$

و برا یِ x جواب ی به شکل ِ یک سری در نظر میگیرم:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j\,x_{(j)}(t). \tag{10}$$

پارامترِ s فقط برا یِ این وارد شده که تشخیصِ مرتبه یِ جملات در بسطِ اختلالی سادتر باشد. در پایانِ محاسبه s را یک میگذارم. دیده میشود

$$\ddot{x} + k\,x = \ddot{x}_{(0)} + k\,x_{(0)} + s\,(\ddot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)}) + s^2\,(\ddot{x}_{(2)} + k\,x_{(2)}) + \cdots\,. \tag{11}$$

$$s\,f(x) = s\,f(x_{(0)}) + s^2\,[f'(x_{(0)})]\,x_{(1)} + \cdots\,. \tag{12}$$

$\mathfrak{X}'$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ است. روابطِ (11) و (12) را در (9) میگذارم. ضریبها یِ s^0 و s^1 و s^2 چنین میشوند.

$$\ddot{x}_{(0)} + k\,x_{(0)} = 0. \tag{13}$$

$$\ddot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = f(x_{(0)}). \tag{14}$$

$$\ddot{x}_{(2)} + k\,x_{(2)} = [f'(x_{(0)})]\,x_{(1)}. \tag{15}$$

و البته میشود کار را ادامه داد: ضریبِ s^j میشود

$$\ddot{x}_{(j)} + k\,x_{(j)} = f_j(x_{(0)}, \dots, x_{(j-1)}). \tag{16}$$

این معادله‌-یِ-دیفرانسیلها همراه شرایطِ مرزی یَند. مثلَن متناظر با شرایط-ِ-اولیه برا یِ معادله یِ (9)،

$$x_{(j)}(0) = x(0)\,\delta_{j\,0}. \tag{17}$$

$$\dot{x}_{(j)}(0) = \dot{x}(0)\,\delta_{j\,0}. \tag{18}$$

به این ترتیب یک روشِ بازگشتی برا یِ محاسبه یِ $x_{(j)}$ ها به دست میئاید.

جوابِ معادله یِ (13) شبیهِ (4) است، که میشود آن را با یک انتقال-ِ-زمان به این شکل دراورد.

$$x_{(0)}(t) = a\,\cos(\omega\,t). \tag{19}$$

1.1 جمله یِ درجه-یِ-دُ در بخشِ غیر-ِ-خطی

وقت ی بخشِ غیر-ِ-خطی درجه-یِ-دُ است، (9) میشود

$$\ddot{x} + k\,x = s\,\alpha\,x^2. \tag{20}$$

ضریب ِ s^1 در این معادله میشود

$$\ddot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = \alpha\,x_{(0)}^2. \tag{21}$$

و با استفاده از (19)،

$$\ddot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = \alpha\,a^2\,\cos^2(\omega\,t). \tag{22}$$

یا،

$$\ddot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = \frac{\alpha\,a^2}{2}\,[1 + \cos(2\,\omega\,t)]. \tag{23}$$

جواب ِ این هم میشود

$$x_{(1)}(t) = \frac{\alpha\,a^2}{2\,k}\,\left[1 - \frac{1}{3}\,\cos(2\,\omega\,t)\right] + A_1\,\cos(\omega\,t) + A_2\,\sin(\omega\,t). \tag{24}$$

A_1 و A_2 ثابت ‌َند و از شرایط ِ اولیه برا یِ $x_{(1)}$ به دست میئایند. با گذاشتن ِ (17) و (18) در (24)، نتیجه میشود

$$x_{(1)}(t) = \frac{\alpha\,a^2}{2\,k}\,\left[1 - \frac{2}{3}\,\cos(\omega\,t) - \frac{1}{3}\,\cos(2\,\omega\,t)\right]. \tag{25}$$

ضریب ِ s^2 در معادله یِ (20) میشود

$$\ddot{x}_{(2)} + k\,x_{(2)} = 2\,\alpha\,x_{(0)}\,x_{(1)}. \tag{26}$$

از (19) و (25) نتیجه میشود

$$2\,\alpha\,x_{(0)}\,x_{(1)} = \frac{\alpha^2\,a^3}{k}\,\left[-\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\,\cos(\omega\,t) - \frac{1}{3}\,\cos(2\,\omega\,t) - \frac{1}{6}\,\cos(3\,\omega\,t)\right]. \tag{27}$$

هر یک از جملات ِ طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا مضرب ی از $[\cos(j\,\omega\,t)]$ است. یک جواب ِ خاص ِ متناظر با چنین-جمله ای در طرف ِ راست ِ (26) هم مضرب ی از $[\cos(j\,\omega\,t)]$ است، به شرط ی که j

یک نباشد. جواب-ِ-خاص ِ متناظر با $[\cos(\omega\, t)]$ به شکل ِ یک مضرب از $[\cos(\omega\, t)]$ نیست، چون $[\cos(\omega\, t)]$ جواب ِ معادله یِ بدون-ِ-طرف ِ دوم است. دیده میشود

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\, t^2}+k\right)\,\left[\frac{t\,\sin(\omega\, t)}{2\,\omega}\right]=\cos(\omega\, t). \tag{28}$$

پس یک جواب ِ خاص ِ متناظر با $[\cos(\omega\, t)]$ مضرب ی از $[t\,\sin(\omega\, t)]$ است. این جواب نسبت به t دُرِئی نیست، و کراندار هم نیست. از اینجا معلوم میشود $x_{(2)}$ دُرِئی نیست، و کراندار هم نیست. در حال ی که معلوم است جواب ِ کامل ِ معادله یِ (20) دُرِئی و کراندار است.

1.2 جمله یِ درجه-یِ-سه در بخش ِ غیر-ِ-خطی

وقت ی بخش ِ غیر-ِ-خطی درجه-یِ-سه است، (9) میشود

$$\ddot{x}+k\,x=s\,\beta\,x^3. \tag{29}$$

ضریب ِ s^1 در این معادله میشود

$$\ddot{x}_{(1)}+k\,x_{(1)}=\beta\,x_{(0)}^3. \tag{30}$$

و با استفاده از (19)،

$$\ddot{x}_{(1)}+k\,x_{(1)}=\beta\,a^3\,\cos^3(\omega\, t). \tag{31}$$

یا،

$$\ddot{x}_{(1)}+k\,x_{(1)}=\frac{\beta\,a^3}{4}\,[3\,\cos(\omega\, t)+\cos(3\,\omega\, t)]. \tag{32}$$

از (28) دیده میشود یک جواب ِ خاص ِ متناظر با $[\cos(\omega\, t)]$ مضرب ی از $[t\,\sin(\omega\, t)]$ است. این جواب نسبت به t دُرِئی نیست، و کراندار هم نیست. از اینجا معلوم میشود $x_{(1)}$ دُرِئی نیست، و کراندار هم نیست. در حال ی که معلوم است جواب ِ کامل ِ معادله یِ (29) دُرِئی و کراندار است.

2 بازبهنجارش ِ پارامتر

مشکل ی که در دُ-مثال ِ پیش دیده شد این است که وقت ی که تعداد ِ محدود ی از جملات ِ بسط ِ اختلالی در نظر گرفته میشود، یک ویژگی یِ مهم ِ جواب ِ کامل از دست میرود: جواب ِ کامل ِ دُرئی ست، اما جواب ِ متناظر با تعداد ِ محدود ی از جملات ِ بسط ِ- اختلالی چنین نیست. مشکل از اینجا پیش میئاید که در بعض ی از مراتب ِ اختلال، بخش ی از چیز ی که طرف ِ راست ِ معادله ظاهر میشود جواب ِ معادله یِ بدون- ِ-طرف- ِ-راست است. یک شکل ِ ساده-شده یِ هم ین مشکل برا یِ خُد ِ معادله یِ خطی یِ (1) هم پیش میئاید. اگر با جمله یِ دوم ِ طرف ِ چپ ِ معادله مثل ِ اختلال رفتار شود، روش ِ اختلال برا یِ حل ِ معادله چنین میشود.

$$\ddot{x} = -s\,k\,x. \tag{33}$$

در نتیجه،

$$\ddot{x}_{(j)} = -k\,x_{(j-1)}. \tag{34}$$

البته

$$\ddot{x}_{(0)} = 0. \tag{35}$$

ولی (35) را هم میشود به شکل ِ کلی یِ (34) نوشت، با این انتخاب که

$$x_{(-1)} = 0. \tag{36}$$

جواب ِ معادله یِ (35) میشود

$$x_{(0)}(t) = a_1 + a_2\,t, \tag{37}$$

که a_1 و a_2 ثابت َند. از آنجا،

$$x_{(j)}(t) = a_1\,\frac{(-k\,t^2)^j}{(2\,j)!} + a_2\,\frac{(-k\,t^2)^j\,t}{(2\,j+1)!}. \tag{38}$$

دیده میشود جملات ِ بسط ِ اختلالی، یا جمع ِ تعداد ِ محدود ی از آنها، دُرِئی نیستند، در حال ی که جواب ِ معادله یِ (1) دُرِئی ست. البته اینجا میشود جمع ِ همه یِ جملات ِ بسط ِ اختلالی را حساب کرد و به جواب ِ دقیق رسید:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} s^j \, x_{(j)}(t), \\
&= a_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-s\,k\,t^2)^j}{(2\,j)!} + a_2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-s\,k\,t^2)^j\,t}{(2\,j+1)!}, \\
&= a_1\,\cos(\tilde{\omega}\,t) + \frac{a_2}{\sqrt{s}}\,\sin(\tilde{\omega}\,t),
\end{aligned}
\tag{39}
$$

که

$$
\tilde{\omega} = \sqrt{s\,k}. \tag{40}
$$

دیده میشود جواب ِ (39)، به ازا یِ $(s=1)$ هم ان جواب ِ (2) است.

رُشن است که جا-به-جا-کردن ِ تکه ای از معادله بین ِ بخش ِ مختل-نشده و بخش ِ اختلالی، جواب ِ دقیق ِ معادله را عوض نمیکند. اما، چنان که در مثال ِ بالا دیده میشود، این جا-به-جایی میتواند رفتار ِ بخش ِ محدود ی از بسط ِ اختلالی را عوض کند. با استفاده از این روش ی را بررسی میکنم که جواب ِ اختلالی برا یِ نوسانگر با جملات ِ غیر- ِ-خطی تا هر مرتبه یِ اختلال خُش-رفتار (اینجا منظور دُرِئی ست) بماند.

روش این است که معادله یِ (9) را چنین مینویسم.

$$
\ddot{x} + \tilde{k}\,x = s\,f(x) + (\tilde{k} - k)\,x, \tag{41}
$$

که در آن بخش ِ اختلالی آن است که در طرف ِ راست است. به این ترتیب معادله هم ان است که بود، اما جمله یِ دوم در طرف ِ راست، از بخش ِ مختل-نشده به بخش ِ اختلالی رفته است. میکوشم $(\tilde{k} - k)$ را چنان تعیین کنم که در هر مرتبه یِ اختلال، طرف ِ راست ِ معادله چنان باشد که در جواب جملات ِ غیر- ِ-دُرِئی ظاهر نشود. برا یِ این، بسط ِ طرف- ِ-راست بر حسب ِ کسینوس و سینوس $(n\,\tilde{\omega}\,t)$، که

$$
\tilde{\omega} = \sqrt{\tilde{k}}, \tag{42}
$$

نباید شامل ِ جمله ی ِ ($n = 1$) باشد. این با تنظیم ِ ضریب ِ x در جمله ی ِ دوم ِ طرف ِ راست ممکن است. به این شکل که برا ی ِ ($\tilde{k} - k$) یک بسط ِ اختلالی مینویسم:

$$\tilde{k} - k = \sum_{j=1}^{\infty} s^j \, \tilde{k}_{(j)}. \tag{43}$$

به این ترتیب معادله ی ِ (41) میشود

$$\ddot{x} + \tilde{k}\, x = s f(x) + \left(\sum_{l=1}^{\infty} s^l \, \tilde{k}_{(l)} \right) \, x. \tag{44}$$

ضریب ِ s^j در این معادله هم میشود

$$\ddot{x}_{(j)} + \tilde{k}\, x_{(j)} = f_j(x_{(0)}, \ldots, x_{(j-1)}) + \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{k}_{(l)}\, x_{(j-l)} + \tilde{k}_{(j)}\, x_{(0)}. \tag{45}$$

از جمله برا ی ِ ($j = 0$)،

$$\ddot{x}_{(0)} + \tilde{k}\, x_{(0)} = 0, \tag{46}$$

که جواب ِ آن را میشود، با یک انتقال- ِ-زمان، چنین نوشت.

$$x_{(0)}(t) = a \, \cos(\tilde{\omega}\, t). \tag{47}$$

به این ترتیب یک روش ِ تکرار برا ی ِ حل ِ معادله در مرتبه ی ِ j به دست میئاید: اگر $x_{(0)}$ تا $x_{(j-1)}$ و $\tilde{k}_{(1)}$ تا $\tilde{k}_{(j-1)}$ معلوم باشند، دُ جمله ی ِ اول ِ طرف ِ راست ِ (45) معلوم َند. اینها را به شکل ِ یک ترکیب ِ خطی از $[\cos(n\, \tilde{\omega}\, t)]$ ها مینویسیم. $\tilde{k}_{(j)}$ از اینجا تعیین میشود که ضریب ِ $[\cos(\tilde{\omega}\, t)]$ در طرف ِ راست ِ (45) صفر باشد. به این ترتیب طرف ِ راست ِ (45) هم به دست میئاید و با استفاده از آن $x_{(j)}$ تعیین میشود.

جواب ی که به این ترتیب به دست میئاید، در همه ی ِ مراتب ِ اختلال دُرئی ست. اما دُره متناظر با k نیست، بل که متناظر با $\tilde{k}$ است. به این تبدیل ِ پارامتر ِ k به پارامتر- ِ-مئثر ِ $\tilde{k}$ بازبهنجارش ِ پارامتر میگویند.

2.1 بازبهنجارشِ جمله یِ درجه-یِ-دُ در بخشِ غیر-ِ-خطی

وقت ی بخشِ غیر-ِ-خطی درجه-یِ-دُ است، معادله یِ (41) چنین میشود.

$$\ddot{x}+\tilde{k}\,x=s\,\alpha\,x^2+(\tilde{k}-k)\,x. \tag{48}$$

ضریبِ s^1 در این معادله میشود

$$\ddot{x}_{(1)}+\tilde{k}\,x_{(1)}=\alpha\,x_{(0)}^2+\tilde{k}_{(1)}\,x_{(0)}. \tag{49}$$

و با استفاده از (47)،

$$\ddot{x}_{(1)}+\tilde{k}\,x_{(1)}=\alpha\,a^2\,\cos^2(\tilde{\omega}\,t)+a\,\tilde{k}_{(1)}\,\cos(\tilde{\omega}\,t). \tag{50}$$

یا،

$$\ddot{x}_{(1)}+\tilde{k}\,x_{(1)}=\frac{\alpha\,a^2}{2}\,[1+\cos(2\,\tilde{\omega}\,t)]+a\,\tilde{k}_{(1)}\,\cos(\tilde{\omega}\,t). \tag{51}$$

این که در طرفِ راست $[\cos(\tilde{\omega}\,t)]$ ظاهر نشود نتیجه میدهد

$$\tilde{k}_{(1)}=0. \tag{52}$$

به این ترتیب جوابِ (51)، همراه با شرایط-ِ-اولیه یِ (17) و (18)، میشود

$$x_{(1)}(t)=\frac{\alpha\,a^2}{2\,\tilde{k}}\,\left[1-\frac{2}{3}\,\cos(\tilde{\omega}\,t)-\frac{1}{3}\,\cos(2\,\tilde{\omega}\,t)\right]. \tag{53}$$

ضریبِ s^2 در معادله یِ (48) میشود

$$\ddot{x}_{(2)}+\tilde{k}\,x_{(2)}=2\,\alpha\,x_{(0)}\,x_{(1)}+\tilde{k}_{(1)}\,x_{(1)}+\tilde{k}_{(2)}\,x_{(0)}, \tag{54}$$

و با استفاده از (52)،

$$\ddot{x}_{(2)}+\tilde{k}\,x_{(2)}=2\,\alpha\,x_{(0)}\,x_{(1)}+\tilde{k}_{(2)}\,x_{(0)}. \tag{55}$$

از (47) و (53) نتیجه میشود

$$2\,\alpha\,x_{(0)}\,x_{(1)} = \frac{\alpha^2\,a^3}{\tilde{k}}\,\left[-\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\,\cos(\tilde{\omega}\,t) - \frac{1}{3}\,\cos(2\,\tilde{\omega}\,t) - \frac{1}{6}\,\cos(3\,\tilde{\omega}\,t)\right]. \quad (56)$$

پس شرط ِ این که ضریب ِ $[\cos(\tilde{\omega}\,t)]$ در طرف ِ راست ِ (55) صفر باشد این است که

$$\tilde{k}_{(2)} = -\frac{5}{6}\,\frac{\alpha^2\,a^2}{\tilde{k}}. \quad (57)$$

جواب ی که به این ترتیب برا یِ $x_{(2)}$ به دست میئاید دُرِئی ست. از (57) هم نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\tilde{k} &= k - \frac{5}{6}\,\frac{s^2\,\alpha^2\,a^2}{k + o(s)},\\ &= k - \frac{5}{6}\,\frac{s^2\,\alpha^2\,a^2}{k} + o(s^3),\end{aligned} \quad (58)$$

که با یک-گذاشتن ِ s میشود

$$\tilde{k} = k - \frac{5}{6}\,\frac{\alpha^2\,a^2}{k} + \cdots\,. \quad (59)$$

پس $\tilde{\omega}$ (بسامد- ِ-زاویئی-یِ-مئثر) چنین میشود.

$$\tilde{\omega} = \omega\,\left(1 - \frac{5}{12}\,\frac{\alpha^2\,a^2}{\omega^4} + \cdots\right). \quad (60)$$

2.2 بازبهنجارش ِ جمله یِ درجه-یِ-سه در بخش ِ غیر- ِ-خطی

وقت ی بخش ِ غیر- ِ-خطی درجه-یِ-سه است، معادله یِ (41) چنین میشود.

$$\ddot{x} + \tilde{k}\,x = s\,\beta\,x^3 + (\tilde{k} - k)\,x. \quad (61)$$

ضریب ِ s^1 در این معادله میشود

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{k}\,x_{(1)} = \beta\,x_{(0)}^3 + \tilde{k}_{(1)}\,x_{(0)}. \quad (62)$$

و با استفاده از (47)،

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{k}\,x_{(1)} = \beta\,a^3\,\cos^3(\omega\,t) + a\,\tilde{k}_{(1)}\,\cos(\tilde{\omega}\,t). \quad (63)$$

یا،

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{k}\, x_{(1)} = \frac{\beta\, a^3}{4}\, [3\, \cos(\omega\, t) + \cos(3\,\omega\, t)] + a\, \tilde{k}_{(1)}\, \cos(\tilde{\omega}\, t). \qquad (64)$$

این که در طرفِ راست $[\cos(\tilde{\omega}\, t)]$ ظاهر نشود نتیجه میدهد

$$\tilde{k}_{(1)} = -\frac{3}{4}\, \beta\, a^2. \qquad (65)$$

جوابی که به این ترتیب برای $x_{(1)}$ به دست میئاید دُرِئی ست. از (65) هم نتیجه میشود

$$\tilde{k} = k - \frac{3}{4}\, s\, \beta\, a^2 + o(s), \qquad (66)$$

که با یک-گذاشتنِ s میشود

$$\tilde{k} = k - \frac{3}{4}\, \beta\, a^2 + \cdots . \qquad (67)$$

پس $\tilde{\omega}$ (بسامدِ-زاویئیِ-مئثر) چنین میشود.

$$\tilde{\omega} = \omega\, \left(1 - \frac{3}{8}\, \frac{\beta\, a^2}{\omega^2} + \cdots\right). \qquad (68)$$

3 پانوشتها

[1] Ali Hasan Nayfeh & Dean A. Mook; "Nonlinear oscillations" (John Wiley & Sons, 1995) chapter 2