X1-150 (2020/08/26)

نوسانها یِ غیر- ِ-خطی، اختلال، بازبهنجارش II

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

بازبهنجارش و پارامترها یِ مئثر در حل ِ اختلالی یِ حرکت ِ نوسانی با جملات ِ غیر- ِ-خطی، وقت ی جملات ِ غیر- ِ-خطی یِ شامل ِ سرعت َند بررسی میشود.

0 درامد

این ادامه یِ [1] است، برا یِ حالت ی که جملات ِ غیر- ِ-خطی به سرعت هم وابسته اند. معادله یِ حرکت برا یِ یک نوسانگر ِ هماهنگ ِ ساده با میرایی یِ خطی چنین است.

$$\ddot{x}+\eta\,\dot{x}+k\,x=0, \tag{1}$$

که $\dot{\mathfrak{x}}$ مشتق ِ $\mathfrak{x}$ نسبت به پارامتر (t) است، و k و η ثابتها یی مثبت َند. اسم ِ t را زمان میگذارم، هر چند رُشن است که این اسم-گذاری اثر ی در نتایج ندارد. جمله یِ متناسب-با-سرعت، مثل ِ یک اصطکاک است، اصطکاک ی که نسبت به سرعت خطی ست. جواب ِ این معادله میشود

$$x(t)=b_1\,\exp(z_1\,t)+b_2\,\exp(z_2\,t), \tag{2}$$

که b_j ها ثابتها یی دلبخاه َند و z_j ها جوابها یِ این معادله اند.

$$z^2 + \eta\, z + k = 0. \tag{3}$$

البته میشود این جواب را چنین نوشت.

$$x(t) = b\,[\exp(-\gamma\, t)]\; \cos(\omega'\, t - \phi), \tag{4}$$

که

$$\gamma = \frac{\eta}{2}. \tag{5}$$

$$\omega' = \sqrt{k - \gamma^2}. \tag{6}$$

$$b\; \exp(-\mathrm{i}\,\phi) = 2\, b_1. \tag{7}$$

$$b\; \exp(\mathrm{i}\,\phi) = 2\, b_2. \tag{8}$$

ω' ممکن است مُهومی باشد. در حالت ِ خاص ی که ω' صفر است، که یعنی z_2 با z_1 برابر است، جواب ِ (1) میشود

$$x(t) = (c_0 + c_1\, t)\; \exp(-\gamma\, t), \tag{9}$$

که c_0 و c_1 ثابت َند. این جواب را میشود با یک حد-گیری از مثلَن (4) هم به دست آورد. c_0 و c_1 را چنین تعریف میکنم.

$$c_0 = b\; \cos\phi. \tag{10}$$

$$c_1 = b\,\omega'\; \sin\phi. \tag{11}$$

جواب ِ (4) میشود

$$x(t) = \left[c_0\; \cos(\omega'\, t) + c_1\, \frac{\sin(\omega'\, t)}{\omega'}\right]\; \exp(-\gamma\, t) \tag{12}$$

که در حد ِ $(\omega' \to 0)$ هم ان (9) است.

1 نوسانگر با جملاتِ غیر-ِ-خطی یِ وابسته به سرعت

معادله یِ حرکت برا یِ یک نوسانگر با جملاتِ غیر-ِ-خطی چنین است.

$$\ddot{x} + k\,x = f(x, \dot{x}). \tag{13}$$

اگر دامنه یِ حرکت کوچک باشد، f کوچک میمانَد و میشود با آن مثلِ یک اختلال رفتار کرد (مثلَن [2]). در این حالت، مثلِ [1]، f را با $(s\,f)$ جایگزین میکنم:

$$\ddot{x} + k\,x = s\,f(x, \dot{x}), \tag{14}$$

و برا یِ x جواب ی به شکلِ یک سری در نظر میگیرم:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j\,x_{(j)}(t). \tag{15}$$

پارامترِ s فقط برا یِ این وارد شده که تشخیصِ مرتبه یِ جملات در بسطِ اختلالی سادِتر باشد. در پایانِ محاسبه s را یک میگذارم. دیده میشود

$$\ddot{x} + k\,x = \ddot{x}_{(0)} + k\,x_{(0)} + s\,(\ddot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)}) + s^2\,(\ddot{x}_{(2)} + k\,x_{(2)}) + \cdots. \tag{16}$$

$$s\,f(x) = s\,f(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) + s^2\,\{[(\mathrm{D}_1\,f)(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)})]\,x_{(1)} + [(\mathrm{D}_2\,f)(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)})]\,\dot{x}_{(1)}\} + \cdots. \tag{17}$$

$(\mathrm{D}_j\,\mathfrak{X})$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ نسبت به متغیرِ j اُمِ آن است. روابطِ (16) و (17) را در (14) میگذارم. ضریبها یِ s^0 و s^1 و s^2 چنین میشوند.

$$\ddot{x}_{(0)} + k\,x_{(0)} = 0. \tag{18}$$

$$\ddot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = f(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}). \tag{19}$$

$$\ddot{x}_{(2)} + k\,x_{(2)} = [(\mathrm{D}_1\,f)(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)})]\,x_{(1)} + [(\mathrm{D}_2\,f)(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)})]\,\dot{x}_{(1)}. \tag{20}$$

و البته میشود کار را ادامه داد: ضریبِ s^j میشود

$$\ddot{x}_{(j)} + k\,x_{(j)} = f_j(x_{(0)}, \dots, x_{(j-1)}, \dot{x}_{(0)}, \dots, \dot{x}_{(j-1)}). \tag{21}$$

این معادله-یِ-دیفرانسیلها همراه ِ شرایط ِ مرزی یَند. مثلَن متناظر با شرایط- ِ-اولیه برا یِ معادله یِ (14)،

$$x_{(j)}(0) = x(0)\,\delta_{j\,0}. \tag{22}$$

$$\dot{x}_{(j)}(0) = \dot{x}(0)\,\delta_{j\,0}. \tag{23}$$

به این ترتیب یک روش ِ بازگشتی برا یِ محاسبه یِ $x_{(j)}$ ها به دست میئاید.

جواب ِ معادله یِ (18) را میشود با یک انتقال- ِ-زمان به این شکل دراورد.

$$x_{(0)}(t) = a\,\cos(\omega\,t). \tag{24}$$

1.1 اصطکاک ِ متناسب با توان ِ سوم ِ سرعت

نیرو یِ اصطکاک بر خلاف ِ جهت ِ سرعت است. وقت ی اصطکاک با توان ِ سوم ِ سرعت متناسب باشد، و مستقل از مکان باشد، معادله یِ (13) میشود

$$\ddot{x} + k\,x = \alpha\,\dot{x}^3, \tag{25}$$

که α ثابت ی منفی ست. مانسته یِ (14) هم میشود

$$\ddot{x} + k\,x = s\,\alpha\,\dot{x}^3. \tag{26}$$

ضریب ِ s^1 در این معادله میشود

$$\ddot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = \alpha\,\dot{x}_{(0)}^3. \tag{27}$$

و با استفاده از (24)،

$$\ddot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = -\alpha\,\omega^3\,a^3\,\sin^3(\omega\,t). \tag{28}$$

یا،

$$\ddot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = \frac{\alpha\,\omega^3\,a^3}{4}\,[-3\,\sin(\omega\,t) + \sin(3\,\omega\,t)]. \tag{29}$$

جوابِ خاصِ متناظر با $[\sin(j\,\omega\,t)]$ را میشود متناسب با $[\sin(j\,\omega\,t)]$ گرفت، به شرط ی که j یک نباشد. اما هیچ جواب-ِ-خاص ی برا یِ $[\sin(\omega\,t)]$ نیست که مضربِ $[\sin(\omega\,t)]$ باشد، چون $[\sin(\omega\,t)]$ جوابِ معادله یِ بدون-ِ-طرفِ دوم است. دیده میشود

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}+k\right)\,\left[-\frac{t\,\cos(\omega\,t)}{2\,\omega}\right]=\sin(\omega\,t). \tag{30}$$

از این دیده میشود هیچ جواب-ِ-خاص ی برا یِ $[\sin(\omega\,t)]$ نیست که با افزایشِ t کراندار بماند. پس $x_{(1)}$ کراندار نیست. در حال ی که انتظار میرود اگر α منفی باشد جوابِ کاملِ معادله یِ (25)، و در نتیجه جوابِ کاملِ معادله یِ (26) با s ِ مثبت، کراندار باشد.

1.2 اصطکاکِ متناسب با سرعت و توانِ دومِ مکان

وقت ی اصطکاک با توانِ اولِ سرعت و با توانِ دومِ مکان متناسب باشد، معادله یِ (13) میشود

$$\ddot{x}+k\,x=\beta\,x^2\,\dot{x}, \tag{31}$$

که β ثابت ی منفی ست. مانسته یِ (14) هم میشود

$$\ddot{x}+k\,x=s\,\beta\,x^2\,\dot{x}. \tag{32}$$

ضریبِ s^1 در این معادله میشود

$$\ddot{x}_{(1)}+k\,x_{(1)}=\beta\,x_{(0)}^2\,\dot{x}_{(0)}. \tag{33}$$

و با استفاده از (24)،

$$\ddot{x}_{(1)}+k\,x_{(1)}=-\beta\,\omega\,a^3\,[\cos^2(\omega\,t)]\,\sin(\omega\,t). \tag{34}$$

یا،

$$\ddot{x}_{(1)}+k\,x_{(1)}=-\frac{\beta\,\omega\,a^3}{4}\,[\sin(\omega\,t)+\sin(3\,\omega\,t)]. \tag{35}$$

از (30) دیده میشود یک جواب ِ خاص ِ متناظر با $[\sin(\omega\, t)]$ مضرب ی از $[t\, \cos(\omega\, t)]$ است. این جواب، با افزایش ِ t کراندار نمیمانَد. پس $x_{(1)}$ کراندار نیست.. در حال ی که انتظار میرود اگر β منفی باشد جواب ِ کامل ِ معادله یِ (31)، و در نتیجه جواب ِ کامل ِ معادله یِ (32) با s ِ مثبت، کراندار باشد.

2 بازبهنجارش ِ پارامتر

مشکل ی که در دُ-مثال ِ پیش دیده شد این است که وقت ی تعداد ِ محدود ی از جملات ِ بسط ِ اختلالی در نظر گرفته میشود، یک ویژگی یِ مهم ِ جواب ِ کامل از دست میرود: جواب ِ کامل ِ کراندار است، اما جواب ِ متناظر با تعداد ِ محدود ی از جملات ِ بسط ِ- اختلالی چنین نیست. مشکل از اینجا پیش میئاید که در بعض ی از مراتب ِ اختلال، بخش ی از چیز ی که طرف ِ راست ِ معادله ظاهر میشود جواب ِ معادله یِ بدون- ِ-طرف- ِ-راست است. راه ی که در [1] برا یِ رفع ِ این مشکل به کار رفت بازبهنجارش ِ پارامتر ِ k بود. با این کار یک جمله یِ اضافی متناسب با $[\cos(\omega\, t)]$ در طرف ِ راست ِ معادله ظاهر میشود، و با تنظیم ِ ضریب ِ آن میشد ضریب ِ $[\cos(\omega\, t)]$ در طرف ِ راست را صفر کرد.

اما اینجا جمله یِ نامطلوب در طرف ِ راست ِ معادله $[\sin(\omega\, t)]$ است. برا یِ این که این جمله حذف شود یک جمله یِ اضافی متناسب با $[\sin(\omega\, t)]$ لازم است. $[\sin(\omega\, t)]$ متناسب با مشتق ِ $[\cos(\omega\, t)]$ است. پس جمله یِ اضافی یِ متناسب با $[\sin(\omega\, t)]$ را میشود با افزودن ِ یک جمله یِ متناسب با سرعت به دُ-طرف ِ معادله ساخت. این یعنی معادله یِ (14) با این جایگزین شود.

$$\ddot{x}+\tilde{\eta}\,\dot{x}+k\,x=s\,f(x,\dot{x})+\tilde{\eta}\,\dot{x}, \qquad (36)$$

که در طرف ِ راست،

$$\tilde{\eta}=s\,\tilde{\eta}_{(1)}+o(s). \qquad (37)$$

چون $\tilde{\eta}$ جمله یِ مرتبه-یِ-صفر ندارد، جواب ِ مرتبه-یِ-صفر را میشود هم ان (24) گرفت. $\tilde{\eta}_{(1)}$ هم از اینجا به دست میئاید که در مرتبه یِ یک، ضریب ِ $[\sin(\omega\, t)]$ در طرف ِ راست ِ (36) صفر شود.

2.1 بازبهنجارش برا یِ اصطکاک ِ متناسب با توان ِ سوم ِ سرعت

وقت ی اصطکاک با توان ِ سوم ِ سرعت متناسب است، معادله یِ (36) چنین میشود.

$$\ddot{x} + \tilde{\eta}\,\dot{x} + k\,x = s\,\alpha\,\dot{x}^3 + \tilde{\eta}\,\dot{x}. \tag{38}$$

ضریب ِ s^1 در این معادله میشود

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{\eta}\,\dot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = \alpha\,\dot{x}_{(0)}^3 + \tilde{\eta}_{(1)}\,\dot{x}_{(0)}. \tag{39}$$

و با استفاده از (24)،

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{\eta}\,\dot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = -\alpha\,\omega^3\,a^3\,\sin^3(\omega\,t) - \omega\,a\,\tilde{\eta}_{(1)}\,\sin(\omega\,t). \tag{40}$$

یا،

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{(1)} + \tilde{\eta}\,\dot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = {}& \frac{\alpha\,\omega^3\,a^3}{4}\,[-3\,\sin(\omega\,t) + \sin(3\,\omega\,t)]\\ & - \omega\,a\,\tilde{\eta}_{(1)}\,\sin(\omega\,t).\end{aligned} \tag{41}$$

این که در طرف ِ راست $[\sin(\omega\,t)]$ ظاهر نشود نتیجه میدهد

$$\tilde{\eta}_{(1)} = -\frac{3}{4}\,\alpha\,\omega^2\,a^2. \tag{42}$$

با این، میشود جواب ِ مرتبه-یِ-صفر را شبیه ِ معادله یِ (4) نوشت. این جواب را با $\tilde{x}$ نشان میدهم:

$$\tilde{x}(t) = a\,[\exp(-s\,\tilde{\gamma}_{(1)}\,t)]\,\cos(\omega\,t). \tag{43}$$

البته این جواب با (4) تفاوتها یی دارد. ω' تا مرتبه یِ یک نسبت به $\tilde{\eta}_{(1)}$ هم ان ω است. مبدئ ِ زمان هم چا-به-جا شده تا فاز ِ ϕ ظاهر نشود. جز اینها یک نکته یِ مهم میماند. این که $\tilde{\eta}_{(1)}$ تابع ِ a (دامنه) است، اما طرف ِ راست ِ (43) شبیه ِ یک حرکت ِ نوسانی با دامنه یِ وابسته-به-زمان است. پس $\tilde{\eta}_{(1)}$ تابع ِ زمان میشود، در حال ی که (4) و در نتیجه (43) جوابها یِ معادلات ی را میدهند که ضرایب ِ شان مستقل از زمان َند.

یک راه ِ حل ِ این مشکل آن است که (43) جواب ی برا یِ فقط زمانها یِ کوچک گرفته شود. از اینجا دامنه تا مرتبه یِ یک نسبت به زمان به دست میئاید:

$$a(t) = a(0)\,\left(1 - s\,\frac{\tilde{\eta}_{(1)}\,t}{2} + \cdots\right). \qquad (44)$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{s\,\tilde{\eta}_{(1)}}{2}\,a + \cdots\,. \qquad (45)$$

$\tilde{\eta}_{(1)}$ را از (42) در (45) میگذارم: معادله یِ (45) میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,t} = \frac{3}{8}\,s\,\alpha\,\omega^2\,a^3 + \cdots\,. \qquad (46)$$

این یک معادله یِ دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-یک برا یِ a است. این معادله جداشدنی ست:

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{a^3} = \frac{3\,s\,\alpha\,\omega^2\,\mathrm{d}\,t}{8} + \cdots\,, \qquad (47)$$

که نتیجه میدهد

$$-\frac{1}{2}\,\left[\frac{1}{a^2(t)} - \frac{1}{a^2(0)}\right] = \frac{3\,s\,\alpha\,\omega^2\,t}{8} + \cdots\,. \qquad (48)$$

یا،

$$a(t) = a(0)\,\left[1 - \frac{3\,s\,\alpha\,\omega^2\,a^2(0)}{4}\,t\right]^{-1/2} + \cdots\,. \qquad (49)$$

که با یک-گذاشتن ِ s میشود

$$a(t) = a(0)\,\left[1 - \frac{3\,\alpha\,\omega^2\,a^2(0)}{4}\,t\right]^{-1/2} + \cdots\,. \qquad (50)$$

به این ترتیب، یک جواب ِ تقریبی برا یِ معادله یِ (25) چنین میشود.

$$\tilde{x}(t) = a(0)\,\left[1 - \frac{3\,\alpha\,\omega^2\,a^2(0)}{4}\,t\right]^{-1/2}\,\cos(\omega\,t). \qquad (51)$$

چنان که انتظار میرفت، وقت ی α منفی ست، با گذشت ِ زمان دامنه کم میشود.

2.2 بازبهنجارش برا یِ اصطکاک ِ متناسب با سرعت و توان ِ دوم ِ مکان

وقت ی اصطکاک با سرعت و توان ِ دوم ِ مکان متناسب است، معادله یِ (36) چنین میشود.

$$\ddot{x} + \tilde{\eta}\,\dot{x} + k\,x = s\,\beta\,x^2\,\dot{x} + \tilde{\eta}\,\dot{x}. \tag{52}$$

ضریب ِ s^1 در این معادله میشود

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{\eta}\,\dot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = \beta\,x_{(0)}^2\,\dot{x}_{(0)} + \tilde{\eta}_{(1)}\,\dot{x}_{(0)}. \tag{53}$$

و با استفاده از (24)،

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{\eta}\,\dot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = -\beta\,\omega\,a^3\,[\cos^2(\omega\,t)]\,\sin(\omega\,t) - \omega\,a\,\tilde{\eta}_{(1)}\,\sin(\omega\,t). \tag{54}$$

یا،

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{\eta}\,\dot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} = \frac{\beta\,\omega\,a^3}{4}\,[-\sin(\omega\,t) - \sin(3\,\omega\,t)] - \omega\,a\,\tilde{\eta}_{(1)}\,\sin(\omega\,t). \tag{55}$$

این که در طرف ِ راست $[\sin(\omega\,t)]$ ظاهر نشود نتیجه میدهد

$$\tilde{\eta}_{(1)} = -\frac{1}{4}\,\beta\,a^2. \tag{56}$$

با این، میشود جواب ِ مرتبه-یِ-صفر را شبیه ِ معادله یِ (4) نوشت. این جواب را با $\tilde{x}$ نشان میدهم، رابطه یِ (43). اینجا هم (43) برا یِ فقط زمانها یِ کوچک است و با استفاده از آن، دامنه تا مرتبه یِ یک نسبت به زمان به دست میآید، رابطه یِ (44)، و با استفاده از آن میشود مشتق ِ دامنه نسبت به زمان را حساب کرد، رابطه یِ (45). $\tilde{\eta}_{(1)}$ را از (56) در (45) میگذارم: معادله یِ (45) میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{8}\,s\,\beta\,a^3 + \cdots\,. \tag{57}$$

این یک معادله یِ دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-یک برا یِ a است. این معادله جداشدنی ست:

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{a^3} = \frac{s\,\beta\,\mathrm{d}\,t}{8} + \cdots\,, \tag{58}$$

که نتیجه میدهد

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2(t)}-\frac{1}{a^2(0)}\right]=\frac{s\,\beta\,t}{8}+\cdots. \tag{59}$$

یا،

$$a(t)=a(0)\,\left[1-\frac{s\,\beta\,a^2(0)}{4}\,t\right]^{-1/2}+\cdots. \tag{60}$$

که با یک-گذاشتن ِ s میشود

$$a(t)=a(0)\,\left[1-\frac{\beta\,a^2(0)}{4}\,t\right]^{-1/2}+\cdots. \tag{61}$$

به این ترتیب، یک جواب ِ تقریبی برا یِ معادله یِ (31) چنین میشود.

$$\tilde{x}(t)=a(0)\,\left[1-\frac{\beta\,a^2(0)}{4}\,t\right]^{-1/2}\cos(\omega\,t). \tag{62}$$

چنان که انتظار میرفت، وقت ی β منفی ست، با گذشت ِ زمان دامنه کم میشود.

3 جا-به-جایی

شاید روش ِ بازبهنجارش- ِ-پارامتر ی که اینجا برا یِ رسیدن به معادلات ِ تحول ِ دامنه، معادلات ِ (47) و (57)، به کار رفت، شبیه ِ کلک به نظر برسد: $\tilde{\eta}$، در طرف ِ راست ِ معادلات ِ (38) و (52) عملَن کنار گذاشته شده. کار ی که انجام شده عملَن این است که در روابط ِ (29) و (35)، جمله یِ متناسب با $[\sin(\omega\,t)]$ بر حسب ِ $\dot{x}_{(0)}$ نوشته شده و به طرف ِ چپ برده شده است:

$$\sin(\omega\,t)=-\frac{1}{\omega\,a}\,\dot{x}_{(0)}. \tag{63}$$

3.1 جا-به-جایی برا یِ اصطکاک ِ متناسب با توان ِ سوم ِ سرعت

با استفاده از (63)، معادله یِ (29) میشود

$$\ddot{x}_{(1)}+k\,x_{(1)}-\frac{3\,\alpha\,\omega^2\,a^2}{4}\,\dot{x}_{(0)}=\frac{\alpha\,\omega^3\,a^3}{4}\,\sin(3\,\omega\,t). \tag{64}$$

یا،

$$\ddot{x} + s\,\left(-\frac{3\,\alpha\,\omega^2\,a^2}{4}\right)\,\dot{x} + k\,x = s\,\left(\frac{\alpha\,\omega^3\,a^3}{4}\right)\,\sin(3\,\omega\,t) + o(s). \qquad (65)$$

که یعنی

$$\tilde{\eta} = s\,\left(-\frac{3\,\alpha\,\omega^2\,a^2}{4}\right) + o(s). \qquad (66)$$

این هم ان (42) است.

3.2 جا-به-جایی برا یِ اصطکاک ِ متناسب با سرعت و توان ِ دوم ِ مکان

با استفاده از (63)، معادله یِ (35) میشود

$$\ddot{x}_{(1)} + k\,x_{(1)} - \frac{\beta\,a^2}{4}\,\dot{x}_{(0)} = -\frac{\beta\,\omega\,a^3}{4}\,\sin(3\,\omega\,t). \qquad (67)$$

یا،

$$\ddot{x} + s\,\left(-\frac{\beta\,a^2}{4}\right)\,\dot{x} + k\,x = -s\,\left(\frac{\beta\,\omega\,a^3}{4}\right)\,\sin(3\,\omega\,t) + o(s). \qquad (68)$$

که یعنی

$$\tilde{\eta} = s\,\left(-\frac{\beta\,a^2}{4}\right) + o(s). \qquad (69)$$

این هم ان (56) است.

4 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «نوسانها یِ غیر-ِ-خطی، اختلال، بازبهنجارش I» (2020/07/25) X1-149

[2] Ali Hasan Nayfeh & Dean A. Mook; “Nonlinear oscillations” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1995) chapter 2