X1-151 (2020/10/29)

واکنشها یِ نسبیتی یِ با دُ ذره یِ خروجی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

واکنشها یی (برخُرد یا واپاشی) بررسی میشوند که دُ ذره میسازند. با استفاده از روابط ِ پایستگی، انرژی و تکانه یِ ذرات ِ حاصل تُصیف و محاسبه میشود.

0 درامد

منظور از واکنش برخُرد ِ دُ-ذرئی یا واپاشی (برخُرد ِ تک-ذرئی؟) است. واکنش در حالت ِ کلی n ذره میسازد، که انرژی و تکانه یِ شان با پایستگی یِ انرژی-تکانه مقید میشود. بین ِ E_a (انرژی یِ ذره یِ a) و $\boldsymbol{p}_a$ (تکانه یِ ذره یِ a) این رابطه برقرار است.

$$E_a^2 = c^2\, \boldsymbol{p}_a \cdot \boldsymbol{p}_a + m_a^2\, c^4. \tag{1}$$

m_a جرم ِ ذره یِ a است. از این پس انتخاب میکنم

$$c = 1. \tag{2}$$

به این ترتیب (1) چنین میشود.

$$E_a^2 = \boldsymbol{p}_a \cdot \boldsymbol{p}_a + m_a^2. \tag{3}$$

همچنین γ (ضریب ِ لُرِنتس [1]) متناظر با سرعت ِ $\boldsymbol{v}$ چنین میشود.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}}. \tag{4}$$

از (3) دیده میشود انرژی یِ هر ذره بر حسب ِ تکانه یِ آن ذره مشخص است. برا یِ n ذره یِ خروجی، $(3\,n)$ مئلفه یِ تکانه هست. بین ِ اینها روابط ِ پایستگی یِ انرژی و تکانه برقرار است:

$$E = \sum_a E_a. \tag{5}$$

$$\boldsymbol{p} = \sum_a \boldsymbol{p}_a. \tag{6}$$

اینها جمعَن 4 معادله یِ اسکالرَند. پس $(3\,n - 4)$متغیر ِ مستقل باقی میمانَد. بخش ی از آزادیها یِ باقی-مانده متناظرَند با تقارنها یی که تکانه و انرژی یِ دستگاه را عوض نمیکنند. هر دسته تکانه یِ ذرات ِ دستگاه (پس از برخُرد) را یک پیکربندی مینامم. تقارنها بر مجموعه یِ پیکربندیها اثر میکنند. مجموعه یِ همه یِ پیکربندیها یِ حاصل از اثر ِ تقارنها بر پیکربندی یِ $\mathfrak{C}$ را مدار ِ $\mathfrak{C}$ مینامم. بُعد ِ فضا یِ پیکربندیها $(3\,n - 4)$ است. بُعد ِ هر مدار (تعداد ِ پارامترها یِ مداری) را با σ نشان میدهم. به هر مدار یک شکل میگویم. بُعد ِ فضا یِ شکلها (تعداد ِ پارامترها یِ شکلی) را با Nنشان میدهم:

$$N = 3\,n - 4 - \sigma. \tag{7}$$

اگر تکانه یِ کل ِ دستگاه صفر باشد، تبدیلها یی که انرژی و تکانه یِ دستگاه را عوض نمیکنند همه یِ دورانها یَند. چنین-تبدیلها یی 3 پارامتر دارند. اگر تعداد ِ ذرات ِ خروجی 2 باشد، تکانِها یِ خروجی بر یک خطَند و دوران حُل ِ این خط پیکربندی را عوض نمیکند. در این حالت بُعد ِ مدار 2 است.

$$\sigma = 2, \qquad \boldsymbol{p} = 0, \quad n = 2. \tag{8}$$

$$N = 3\,n - 6, \qquad \boldsymbol{p} = 0, \quad n = 2. \tag{9}$$

اگر تعدادِ ذراتِ خروجی بیش از 2 باشد، بُعدِ مدار 3 است. پس،

$$\sigma = 3, \qquad \boldsymbol{p} = 0, \quad n > 2. \tag{10}$$

$$N = 3\,n - 7, \qquad \boldsymbol{p} = 0, \quad n > 2. \tag{11}$$

اگر تکانه یِ کلِ دستگاه ناصفر باشد، تبدیلها یی که انرژی و تکانه یِ دستگاه را عوض نمیکنند دورانها یی یَند که محورِ شان تکانه یِ دستگاه است. چنین-تبدیلها یی 1 پارامتر دارند و برا یِ مدارها یِ حاصل،

$$\sigma = 1, \qquad \boldsymbol{p} \neq 0. \tag{12}$$

$$N = 3\,n - 5, \qquad \boldsymbol{p} \neq 0. \tag{13}$$

از این پس وضعیت ی را بررسی میکنم که از برخُرد 2 ذره بیرون میروند. به این ترتیب بُعدِ فضا یِ شکلها، اگر تکانه یِ دستگاه صفر باشد 0 و اگر تکانه یِ دستگاه ناصفر باشد 1 است.

1 در چارچوبِ سکون (مرکز-ِ-جرم)

چارچوبِ سکون (یا مرکز-ِ-جرم) چارچوب ی ست که در آن تکانه یِ کلِ دستگاه صفر است. این چارچوب را با پریم مشخص میکنم:

$$\boldsymbol{p}' = 0. \tag{14}$$

انرژی یِ کلِ دستگاه در این چارچوب هم ان جرمِ دستگاه (ضرب در مجذورِ سرعتِ نور) است. جرمِ دستگاه را با m نشان میدهم:

$$m = E'. \tag{15}$$

روابطِ پایستگی میشوند

$$m = E'_1 + E'_2. \tag{16}$$

$$0 = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2. \tag{17}$$

از (17) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{p}_2' = -\boldsymbol{p}_1'. \tag{18}$$

طولِ $\boldsymbol{p}_1'$ را با ϖ نشان میدهم:

$$\varpi = |\boldsymbol{p}_1'|. \tag{19}$$

با استفاده از (3) و (18) و (19)، رابطه یِ (16) چنین میشود.

$$m = \sqrt{m_1^2 + \varpi^2} + \sqrt{m_2^2 + \varpi^2}. \tag{20}$$

این معادله برا یِ ϖ جواب دارد، اگر و تنها اگر

$$m \geq m_1 + m_2. \tag{21}$$

و، با فرضِ این که شرطِ بالا برقرار است، جواب میشود

$$\varpi = \frac{\sqrt{m^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2\,m^2(m_1^2 + m_2^2) - 2\,m_1^2\,m_2^2}}{2\,m}. \tag{22}$$

انرژیها هم چنین میشوند.

$$E_1' = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2\,m}. \tag{23}$$

$$E_2' = \frac{m^2 + m_2^2 - m_1^2}{2\,m}. \tag{24}$$

دیده میشود شکل هیچ پارامتر-ِ-آزاد ی ندارد: تعدادِ پارامترها یِ شکلی 0 است. تعدادِ پارامترها یِ مداری 2 است. اینها را میشود پارامترها یِ تعیین-کننده یِ جهتِ $\boldsymbol{p}_1'$ گرفت، مثلَن (θ', ϕ')، مختصات-ِ-زاویه-یِ-کروی یِ $\boldsymbol{p}_1'$ نسبت به یک جهتِ معین.

2 در چارچوبِ آزمایشگاه

چارچوبِ آزمایشگاه خیزیده یِ چارچوبِ سکون است. سرعتِ خیز را با $\boldsymbol{v}$، و اندازه یِ آن را با v نشان میدهم. پارامتر- ِ-لُرِنتس [1] ِ متناظر با آن، از رابطه یِ (4)، چنین میشود.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{25}$$

خیزیده یِ انرژی و تکانه یِ کلِ دستگاه چنین میشود.

$$E = \gamma\,(E' + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}'). \tag{26}$$

$$\boldsymbol{p} = \gamma\,(\boldsymbol{v}\,E' + \boldsymbol{p}'_{\|}) + \boldsymbol{p}'_{\perp}. \tag{27}$$

که موازی و عمودی نسبت به $\boldsymbol{v}$ تعریف شده. تکانه یِ کل در چارچوبِ سکون صفر است. انرژی یِ چارچوبِ سکون هم m است. پس،

$$E = \gamma\,m. \tag{28}$$

$$\boldsymbol{p} = \gamma\,\boldsymbol{v}\,m. \tag{29}$$

به این ترتیب،

$$\gamma = \frac{E}{m}. \tag{30}$$

$$v = \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{E}. \tag{31}$$

انرژی و تکانه یِ ذراتِ خروجی هم چنین میشود.

$$E_a = \gamma\,(E'_a + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}'_a). \tag{32}$$

$$\boldsymbol{p}_a = \gamma\,(\boldsymbol{v}\,E'_a + \boldsymbol{p}'_{a\,\|}) + \boldsymbol{p}'_{a\,\perp}. \tag{33}$$

مختصات- ِ-زاویه-یِ- کروی- یِ (θ', ϕ') برا یِ $\boldsymbol{p}_1$ را نسبت به جهتِ $\boldsymbol{v}$ تعریف میکنم. به این ترتیب، از جمله،

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}'_1 = v\,\varpi\,\cos\theta'. \tag{34}$$

پس،

$$E_1 = \gamma\,(E_1' + v\,\varpi\,\cos\theta'). \tag{35}$$

$$\boldsymbol{p}_1 = \gamma\,(v\,E_1' + \varpi\,\cos\theta')\,\frac{\boldsymbol{v}}{v} + \boldsymbol{p}'_{1\,\perp}. \tag{36}$$

و البته،

$$|\boldsymbol{p}'_{1\,\perp}| = \varpi\,\sin\theta'. \tag{37}$$

برا یِ θ_1 (زاویه یِ $\boldsymbol{p}_1$ نسبت به $\boldsymbol{v}$) هم،

$$\cos\theta_1 = \frac{\gamma\,(v\,E_1' + \varpi\,\cos\theta')}{|\boldsymbol{p}_1|}. \tag{38}$$

یا،

$$\cos\theta_1 = \frac{\gamma\,(v\,E_1' + \varpi\,\cos\theta')}{\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}. \tag{39}$$

پس،

$$E_1\,\cos\theta_1 = \frac{\gamma^2\,\{[v\,(E_1')^2 + (\varpi\,\cos\theta')^2] + (1+v^2)\,E_1'\,\varpi\,\cos\theta'\}}{\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}. \tag{40}$$

روابط ِ متناظر برا یِ ذره یِ خروجی یِ دوم هم چنین میشوند.

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}_2' = -v\,\varpi\,\cos\theta'. \tag{41}$$

$$E_2 = \gamma\,(E_2' - v\,\varpi\,\cos\theta'). \tag{42}$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \gamma\,(v\,E_2' - \varpi\,\cos\theta')\,\frac{\boldsymbol{v}}{v} + \boldsymbol{p}'_{2\,\perp}. \tag{43}$$

$$|\boldsymbol{p}'_{2\,\perp}| = \varpi\,\sin\theta'. \tag{44}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\gamma\,(v\,E_2' - \varpi\,\cos\theta')}{|\boldsymbol{p}_2|}. \tag{45}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\gamma\,(v\,E_2' - \varpi\,\cos\theta')}{\sqrt{E_2^2 - m_2^2}}. \tag{46}$$

$$E_2\,\cos\theta_2 = \frac{\gamma^2\,\{[v\,(E_2')^2 + (\varpi\,\cos\theta')^2] - (1+v^2)\,E_2'\,\varpi\,\cos\theta'\}}{\sqrt{E_2^2 - m_2^2}}. \tag{47}$$

البته رُشن است که

$$\boldsymbol{p}'_{2\,\perp} = -\boldsymbol{p}'_{1\,\perp}. \tag{48}$$

در چارچوبِ آزمایشگاه، تعدادِ پارامترها یِ شکلی 1 است. پارامترِ شکل را میشود θ' گرفت. تعدادِ پارامترها یِ مداری هم 1 است. پارامترِ مدار را میشود ϕ' گرفت.

از رابطه یِ (38) یک شرط به دست میئاید برا یِ این که ممکن باشد که ذره یِ 1 برگردد، یعنی θ_1 منفرجه شود، یا ($\cos\theta_1$) منفی شود. این شرط چنین است.

$$v \le \frac{\varpi}{E'_1}. \tag{49}$$

طرفِ راست، سرعتِ 1 در چارچوبِ سکون است. پس شرط میشود

$$v \le v'_1. \tag{50}$$

رُشن است که شرطِ مشابه، برا یِ این که ممکن باشد که ذره یِ 2 برگردد، چنین است.

$$v \le \frac{\varpi}{E'_2}. \tag{51}$$

یا،

$$v \le v'_2. \tag{52}$$

3 فرایندها

فرایندها یِ ممکن واپاشی و برخُرد َند. مشخصه یِ $\mathfrak{X}$ برا یِ ذره-یِ-برخرد-کننده یِ a را با $\tilde{\mathfrak{X}}_a$ نشان میدهم.

3.1 واپاشی

در واپاشی، جرمِ دستگاه هم ان جرمِ ذره یِ واپاشنده است:

$$m = \tilde{m}. \tag{53}$$

و البته،

$$\tilde{m} = \sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{\boldsymbol{p}} \cdot \tilde{\boldsymbol{p}}}. \qquad (54)$$

رُشن است که

$$E = \tilde{E}. \qquad (55)$$

$$\boldsymbol{p} = \tilde{\boldsymbol{p}}. \qquad (56)$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\tilde{\boldsymbol{p}}}{\tilde{E}}. \qquad (57)$$

همچنین،

$$\tilde{E}' = \tilde{m}. \qquad (58)$$

$$\tilde{\boldsymbol{p}}' = 0. \qquad (59)$$

شرطِ (21) این است که جرمِ ذره یِ واپاشنده از مجموعِ جرمها یِ محصولاتِ واپاشی کمتر نباشد:

$$\tilde{m} \geq m_1 + m_2. \qquad (60)$$

3.2 برخُرد

$$m = \sqrt{(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 - (\tilde{\boldsymbol{p}}_1 + \tilde{\boldsymbol{p}}_2) \cdot (\tilde{\boldsymbol{p}}_1 + \tilde{\boldsymbol{p}}_2)}. \qquad (61)$$

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_2' = -\tilde{\boldsymbol{p}}_1'. \qquad (62)$$

$$m = \tilde{E}_1' + \tilde{E}_2'. \qquad (63)$$

این را میشود چنین نوشت.

$$m = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \tilde{K}', \qquad (64)$$

که $\tilde{K}'$ انرژی یِ جنبشی یِ ذرات ِ برخُرد-کننده در چارچوب ِ سکون است:

$$\tilde{K}' = \tilde{K}'_1 + \tilde{K}'_2. \tag{65}$$

و

$$\tilde{K}_i = \tilde{E}_i - m_i. \tag{66}$$

از جمله،

$$\tilde{K}'_i = \tilde{E}'_i - m_i. \tag{67}$$

دیده میشود

$$\tilde{K}'_i \geq 0. \tag{68}$$

و برابری زمان ی و فقط زمان ی رخ میدهد که $\tilde{\boldsymbol{p}}'_i$ صفر باشد. به این ترتیب جرم ِ دستگاه ناکوچکتر از مجموعِ جرم ِ ذرات ِ برخُرد-کننده است، و زمان ی و فقط زمان ی با مجموعِ جرم ِ ذرات ِ برخُرد-کننده برابر است که تکانه یِ ذرات ِ برخُرد-کننده در چارچوب ِ سکون صفر باشد، یعنی ذرات ِ برخُرد-کننده نسبت به هم ساکن باشند. شرط ِ (21) هم میشود

$$\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \tilde{K}' \geq m_1 + m_2. \tag{69}$$

اگر مجموعِ جرم ِ ذرات ِ برخُرد-کننده بیش از مجموعِ جرم ِ ذرات ِ حاصل از برخُرد باشد، شرط ِ بالا بدیهی ست. اگر نَ، شرط ِ بالا یک شرط بر انرژی-یِ-جنبشی یِ ذرات ِ برخُرد-کننده در چارچوب ِ سکون است:

$$\tilde{K}' \geq (m_1 + m_2) - (\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2). \tag{70}$$

یک چارچوب ِ خاص این است که یک ی از ذرات ِ برخُرد-کننده ساکن باشد. گیرم ذره یِ 2 ساکن است:

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_2 = 0. \tag{71}$$

$$\tilde{E}_2 = m_2. \tag{72}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{p} = \tilde{\boldsymbol{p}}_1. \tag{73}$$

$$E = \tilde{E}_1 + m_2. \tag{74}$$

همچنین،

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_2\, \tilde{E}_2}. \tag{75}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\tilde{\boldsymbol{p}}_1}{\tilde{E}_1 + m_2}. \tag{76}$$

$$\gamma = \frac{\tilde{E}_1 + m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_2\, \tilde{E}_1}}. \tag{77}$$

4 پانوشتها

[1] Lorentz