X1-152 (2020/11/21)

واکنشها یِ نسبیتی یِ با سه ذره یِ خروجی

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

واکنشها یی بررسی میشوند که سه ذره میسازند. با استفاده از روابطِ پایستگی، انرژی و تکانه یِ ذراتِ حاصل تُصیف و محاسبه میشود.

0 درامد

این ادامه یِ [1] است. نمادها یِ [1] اینجا هم به کار میرود. از جمله، انتخاب میکنم

$$c = 1. \tag{1}$$

بینِ E_a (انرژی یِ ذره یِ a) و $\boldsymbol{p}_a$ (تکانه یِ ذره یِ a) این رابطه برقرار است.

$$E_a^2 = \boldsymbol{p}_a \cdot \boldsymbol{p}_a + m_a^2. \tag{2}$$

m_a جرمِ ذره یِ a است. γ (ضریبِ لُرِنتس [2]) متناظر با سرعتِ $\boldsymbol{v}$ چنین میشود.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}}. \tag{3}$$

انرژی و تکانه یِ دستگاه را با، به ترتیب، E و $\boldsymbol{p}$ نشان میدهم. روابط ِ پایستگی یِ انرژی و تکانه چنین میشوند

$$E = \sum_a E_a. \tag{4}$$

$$\boldsymbol{p} = \sum_a \boldsymbol{p}_a. \tag{5}$$

اینجا وضعیت ی را بررسی میکنم که از برخُرد 3 ذره بیرون میروند. به این ترتیب بُعد ُ فضا یِ شکلها، اگر تکانه یِ دستگاه صفر باشد 2 و اگر تکانه یِ دستگاه ناصفر باشد 4 است.

1 در چارچوب ِ سکون (مرکز- ِ -جرم)

چارچوب ِ سکون (یا مرکز- ِ -جرم) چارچوب ی ست که در آن تکانه یِ کل ِ دستگاه صفر است. این چارچوب را با پریم مشخص میکنم:

$$\boldsymbol{p}' = 0. \tag{6}$$

انرژی یِ کل ِ دستگاه در این چارچوب هم ان جرم ِ دستگاه (ضرب در مجذور ِ سرعت ِ نور) است. جرم ِ دستگاه را با m نشان میدهم:

$$m = E'. \tag{7}$$

روابط ِ پایستگی میشوند

$$m = E'_1 + E'_2 + E'_3. \tag{8}$$

$$0 = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 + \boldsymbol{p}'_3. \tag{9}$$

از (9) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{p}'_3 = -(\boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2). \tag{10}$$

به این ترتیب، (8) چنین میشود.

$$m = E'_1 + E'_2 + \sqrt{m_3^2 + |\boldsymbol{p}'_1|^2 + |\boldsymbol{p}'_2|^2 + 2\,|\boldsymbol{p}'_1|\,|\boldsymbol{p}'_2|\,\cos\theta'_{1\,2}}. \tag{11}$$

که $\theta'_{1\,2}$ زاویه یِ $\boldsymbol{p}'_2$ نسبت به $\boldsymbol{p}'_1$ است. (11) نتیجه میدهد

$$\cos\theta'_{1\,2} = \frac{m^2 + m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - 2\,m\,(E'_1 + E'_2) + 2\,E'_1\,E'_2}{2\,|\boldsymbol{p}'_1|\,|\boldsymbol{p}'_2|}. \tag{12}$$

یا،

$$\cos\theta'_{1\,2} = \frac{m^2 + m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - 2\,m\,(E'_1 + E'_2) + 2\,E'_1\,E'_2}{2\,\sqrt{(E'_1)^2 - m_1^2}\,\sqrt{(E'_2)^2 - m_2^2}}. \tag{13}$$

کمیتِ $\mathfrak{X}$ متناظر با دستگاه ی که شاملِ ذراتِ 2 و 3 است را با $\mathfrak{X}_{2\,3}$ نشان میدهم. از جمله جرمِ این دستگاه (انرژی یِ این دستگاه در چارچوب- ِ-سکونِ این دستگاه) را با $m_{2\,3}$ نشان میدهم. دیده میشود

$$E'_{2\,3} = E'_2 + E'_3. \tag{14}$$

$$\boldsymbol{p}'_{2\,3} = \boldsymbol{p}'_2 + \boldsymbol{p}'_3. \tag{15}$$

که، با استفاده از (8) و (9) میشوند

$$E'_{2\,3} = m - E'_1. \tag{16}$$

$$\boldsymbol{p}'_{2\,3} = -\boldsymbol{p}'_1. \tag{17}$$

همچنین،

$$m_{2\,3} = \sqrt{E'^2_{2\,3} - \boldsymbol{p}'_{2\,3}\cdot\boldsymbol{p}'_{2\,3}}. \tag{18}$$

پس،

$$m_{2\,3} = \sqrt{m^2 + m_1^2 - 2\,m\,E'_1}. \tag{19}$$

با استفاده از این که

$$m_{2\,3} \geq m_2 + m_3, \tag{20}$$

دیده میشود $E'_{1\,\mathrm{max}}$ (بیشینه یِ E'_1) این را برمیئاورَد.

$$E'_{1\,\mathrm{max}} = \frac{m^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2\,m}. \tag{21}$$

رُشن است که $E'_{1\,\mathrm{min}}$ (کمینه یِ E'_1) هم این را برمیئاورَد.

$$E'_{1\,\mathrm{min}} = m_1. \tag{22}$$

چارچوبِ سکونِ دستگاه ی که شاملِ ذراتِ 2 و 3 است را با زگّند نشان میدهم. دیده میشود

$$m_{2\,3} = E''_2 + E''_3. \tag{23}$$

$$0 = \boldsymbol{p}''_2 + \boldsymbol{p}''_3. \tag{24}$$

اینها، همراه با (2)، نتیجه میدهند

$$E''_2 = \frac{m_{2\,3}^2 + m_2^2 - m_3^2}{2\,m_{2\,3}}. \tag{25}$$

یا،

$$E''_2 = \frac{m^2 + m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - 2\,m\,E'_1}{2\,\sqrt{m^2 + m_1^2 - 2\,m\,E'_1}}. \tag{26}$$

و،

$$|\boldsymbol{p}''_2| = \frac{\sqrt{m_{2\,3}^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2\,m_{2\,3}^2\,(m_2^2 + m_3^2) - 2\,m_2^2\,m_3^2}}{2\,m_{2\,3}}. \tag{27}$$

یا،

$$|\boldsymbol{p}''_2| = \frac{\sqrt{(m^2 + m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 - 2\,m\,E'_1)^2 - 4\,m_2^2\,m_3^2}}{2\,\sqrt{m^2 + m_1^2 - 2\,m\,E'_1}}. \tag{28}$$

و البته،

$$E''_3 = \frac{m_{2\,3}^2 - m_2^2 + m_3^2}{2\, m_{2\,3}}. \tag{29}$$

یا،

$$E''_3 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 - 2\, m\, E'_1}{2\, \sqrt{m^2 + m_1^2 - 2\, m\, E'_1}}. \tag{30}$$

همچنین،

$$|\boldsymbol{p}''_3| = |\boldsymbol{p}''_2|. \tag{31}$$

سرعتِ متناظر با خیز ی که چارچوب ِ زگّند را به چارچوب ِ پریم تبدیل میکند را با $\boldsymbol{v}'$ و اندازه یِ آن را با v' نشان میدهم:

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{p}'_{2\,3}}{E'_{2\,3}}. \tag{32}$$

پس،

$$\boldsymbol{v}' = -\frac{\boldsymbol{p}'_1}{m - E'_1}. \tag{33}$$

$$v' = \frac{\sqrt{E'^2_1 - m_1^2}}{m - E'_1}. \tag{34}$$

$$\gamma' = \frac{m - E'_1}{m_{2\,3}}. \tag{35}$$

یا،

$$\gamma' = \frac{m - E'_1}{\sqrt{m^2 + m_1^2 - 2\, m\, E'_1}}. \tag{36}$$

خیزِ متناظر با سرعت ِ $\boldsymbol{v}'$ کمیتها یِ زگّند-دار را به کمیتها یِ پریم-دارِ متناظر تبدیل میکند. از جمله،

$$E'_2 = \gamma'\, (E''_2 + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{p}''_2). \tag{37}$$

پس،

$$E'_{2\,\min} = \gamma' \left(E''_2 - v' \, |\boldsymbol{p}''_2|\right). \tag{38}$$

$$E'_{2\,\max} = \gamma' \left(E''_2 + v' \, |\boldsymbol{p}''_2|\right). \tag{39}$$

رُشن است که این کمینه و بیشینه به ازا یِ یک مقدارِ معین برا یِ E'_1 حساب شده اند.

زاویِها یِ کروی یِ $\boldsymbol{p}'_2$ نسبت به $\boldsymbol{p}'_1$ را با $(\theta'_{1\,2}, \phi'_{1\,2})$ نشان میدهم. زاویِها یِ کروی یِ $\boldsymbol{p}'_1$ نسبت به یک جهتِ خاص (مثلَن سرعتِ خیز ی که چارچوبِ پریم را به چارچوبِ آزمایشگاه تبدیل میکند) را هم با (θ'_1, ϕ'_1) نشان میدهم. محورِ z را بر این جهتِ خاص میگذارم. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{p}'_1 = |\boldsymbol{p}'_1| \, [(\hat{\boldsymbol{x}} \, \cos\phi'_1 + \hat{\boldsymbol{y}} \, \sin\phi'_1) \, \sin\theta'_1 + \hat{\boldsymbol{z}} \, \cos\theta'_1]. \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}'_2 = |\boldsymbol{p}'_2| \, \Big(&\{[(\hat{\boldsymbol{x}} \, \cos\phi'_1 + \hat{\boldsymbol{y}} \, \sin\phi'_1) \, \cos\theta'_1 - \hat{\boldsymbol{z}} \, \sin\theta'_1] \, \cos\phi'_{1\,2} \\ &+ (-\hat{\boldsymbol{x}} \, \sin\phi'_1 + \hat{\boldsymbol{y}} \, \cos\phi'_1) \, \sin\phi'_{1\,2}\} \, \sin\theta'_{1\,2} \\ &+ [(\hat{\boldsymbol{x}} \, \cos\phi'_1 + \hat{\boldsymbol{y}} \, \sin\phi'_1) \, \sin\theta'_1 + \hat{\boldsymbol{z}} \, \cos\theta'_1] \, \cos\theta'_{1\,2}\Big). \end{aligned} \tag{41}$$

θ'_1 و ϕ'_1 فقط جهتِ $\boldsymbol{p}'_1$ را تعیین میکنند و بر شکل اثر ندارند. $\phi'_{1\,2}$ هم متناظر با دورانِ $\boldsymbol{p}'_2$ نسبت به $\boldsymbol{p}'_1$ است، و آن هم بر شکل اثر ندارد. $\theta'_{1\,2}$ بر حسبِ $|\boldsymbol{p}'_1|$ و $|\boldsymbol{p}'_2|$ (یا E'_1 و E'_2) به دست میئاید و پارامترِ آزاد نیست، رابطه یِ (12) یا (13). همه یِ کمیتها یِ دیگر هم بر حسبِ $\boldsymbol{p}'_1$ و $\boldsymbol{p}'_2$ به دست میئایند. پس تعدادِ پارامترها یی که شکل را تعیین میکنند 2 است. این پارامترها را میشود E'_1 و E'_2 گرفت. بُعدِ فضا یِ شکلها 2 است، چنان که انتظار میرفت. تعدادِ پارامترها یِ مداری 3 است. پارامترها یِ مدار را میشود θ'_1 و ϕ'_1 و $\phi'_{1\,2}$ گرفت.

2 در چارچوبِ آزمایشگاه

چارچوبِ آزمایشگاه خیزیده یِ چارچوبِ سکون است. سرعتِ خیز را با $\boldsymbol{v}$، و اندازه یِ آن را با v نشان میدهم. پارامترِ-لُرِنتس [2] متناظر با آن، از رابطه یِ (3)، چنین میشود.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{42}$$

خیزیده یِ انرژی و تکانه یِ کل ِ دستگاه چنین میشود.

$$E = \gamma\,(E' + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}'). \tag{43}$$

$$\boldsymbol{p} = \gamma\,(\boldsymbol{v}\,E' + \boldsymbol{p}'_{\parallel}) + \boldsymbol{p}'_{\perp}. \tag{44}$$

که موازی و عمودی نسبت به $\boldsymbol{v}$ تعریف شده. تکانه یِ کل در چارچوب ِ سکون صفر است. انرژی یِ چارچوب ِ سکون هم m است. پس،

$$E = \gamma\,m. \tag{45}$$

$$\boldsymbol{p} = \gamma\,\boldsymbol{v}\,m. \tag{46}$$

به این ترتیب،

$$\gamma = \frac{E}{m}. \tag{47}$$

$$v = \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{E}. \tag{48}$$

انرژی و تکانه یِ ذرات ِ خروجی هم چنین میشود.

$$E_a = \gamma\,(E'_a + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}'_a). \tag{49}$$

$$\boldsymbol{p}_a = \gamma\,(\boldsymbol{v}\,E'_a + \boldsymbol{p}'_{a\,\parallel}) + \boldsymbol{p}'_{a\,\perp}. \tag{50}$$

مختصات- ِ-زاویه-یِ-کروی-یِ (θ'_1, ϕ'_1) برا یِ $\boldsymbol{p}_1$ را نسبت به جهت ِ $\boldsymbol{v}$ تعریف میکنم. به این ترتیب، از جمله،

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}'_1 = v\,|\boldsymbol{p}'_1|\,\cos\theta'_1. \tag{51}$$

پس،

$$E_1 = \gamma\,(E'_1 + v\,|\boldsymbol{p}'_1|\,\cos\theta'_1). \tag{52}$$

$$\boldsymbol{p}_1 = \gamma\,(v\,E'_1 + |\boldsymbol{p}'_1|\,\cos\theta'_1)\,\frac{\boldsymbol{v}}{v} + \boldsymbol{p}'_{1\,\perp}. \tag{53}$$

و البته،

$$|\boldsymbol{p}'_{1\,\perp}| = |\boldsymbol{p}'_1|\,\sin\theta'_1. \tag{54}$$

برا یِ θ_1 (زاویه یِ $\boldsymbol{p}_1$ نسبت به $\boldsymbol{v}$) هم،

$$\cos\theta_1 = \frac{\gamma\,(v\,E'_1 + |\boldsymbol{p}'_1|\,\cos\theta'_1)}{|\boldsymbol{p}_1|}. \tag{55}$$

یا،

$$\cos\theta_1 = \frac{\gamma\,(v\,E'_1 + |\boldsymbol{p}'_1|\,\cos\theta'_1)}{\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}. \tag{56}$$

پس،

$$E_1\,\cos\theta_1 = \frac{\gamma^2\,\{[v\,(E'_1)^2 + (|\boldsymbol{p}'_1|\,\cos\theta'_1)^2] + (1+v^2)\,E'_1\,|\boldsymbol{p}'_1|\,\cos\theta'_1\}}{\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}. \tag{57}$$

محورِ z را هم-جهت با $\boldsymbol{v}$ میگیرم. در این صورت (53) چنین میشود.

$$\boldsymbol{p}_1 = |\boldsymbol{p}'_1|\,(\hat{\boldsymbol{x}}\,\cos\phi'_1 + \hat{\boldsymbol{y}}\,\sin\phi'_1)\,\sin\theta'_1 + \gamma\,(v\,E'_1 + |\boldsymbol{p}'_1|\,\cos\theta'_1)\,\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{58}$$

در چارچوبِ آزمایشگاه، تعدادِ پارامترها یِ شکلی 4 است. پارامترها یِ شکل را میشود E'_1 و E'_2 و θ'_1 و $\phi'_{1\,2}$ گرفت. تعدادِ پارامترها یِ مداری هم 1 است. پارامترِ مدار را میشود ϕ'_1 گرفت.

رابطه یِ (52) مقدارِ E_1 را بر حسبِ E'_1 و $(\cos\theta'_1)$ میدهد. E'_1 بین کمینه اَش، m_1، و بیشینه اَش، $E_{1\,\max}$ از رابطه یِ (21)، تغییر میکند. $(\cos\theta'_1)$ هم بینِ (-1) و 1 تغییر میکند. این تغییرات مستقل از همَ‌ند. یعنی گستره یِ تغییرِ E'_1 به مقدارِ $(\cos\theta'_1)$ وابسته نیست، و گستره یِ تغییرِ $(\cos\theta'_1)$ به مقدارِ E'_1 وابسته نیست. اما گستره یِ تغییرِ E_1 به مقدارِ $(\cos\theta'_1)$ وابسته است. به ازا یِ هر مقدارِ $(\cos\theta'_1)$، کمینه و بیشینه یِ E_1 یا در مرزِ گستره یِ تغییرِ E'_1 رخ میدهند، یا جا یی که مشتقِ E_1 نسبت به E'_1 صفر شود. از (52) دیده میشود

$$\left(\frac{\partial\,E_1}{\partial\,E'_1}\right)_{\cos\theta'_1} = \gamma\,\left(1 + \frac{E'_1}{\sqrt{E'^2_1 - m_1^2}}\,v\,\cos\theta'_1\right). \tag{59}$$

مقدار ی از E'_1 که به ازا یِ آن مشتقِ E_1 نسبت به E'_1 صفر میشود را با $E'_{1\,\mathrm{z}}$ نشان میدهم:

$$0 = 1 + \frac{E'_{1\,\mathrm{z}}}{\sqrt{E'^2_{1\,\mathrm{z}} - m_1^2}}\, v\, \cos\theta'_1. \tag{60}$$

این معادله فقط وقت ی برا یِ $E'_{1\,\mathrm{z}}$، که مثبت است، جواب دارد که $(\cos\theta'_1)$ منفی باشد. در این صورت،

$$E'_{1\,\mathrm{z}} = \frac{m_1}{\sqrt{1 - (v\, \cos\theta'_1)^2}}. \tag{61}$$

این جواب وقت ی پذیرفتنی ست که کمتر از $E_{1\,\mathrm{max}}$ باشد. شرطِ اخیر یعنی

$$(v\, \cos\theta'_1)^2 \le v'^2_{1\,\mathrm{max}}. \tag{62}$$

که، همراه با شرطِ منفی-بودنِ $(\cos\theta'_1)$، چنین میشود.

$$(v\, \cos\theta'_1) \ge -v'_{1\,\mathrm{max}}. \tag{63}$$

از (59) دیده میشود وقت ی $(\cos\theta'_1)$ منفی ست، مشتقِ E_1 نسبت به E'_1 به ازا یِ E'_1 ها یِ نزدیک به m_1 منفی ست. E'_1 هم، به ازا یِ مقدار ی ثابت برا یِ $(\cos\theta'_1)$ دست-ِ-بالا یک جا فرینه میشود. پس بیشینه یِ E_1 حتمَن در مرزِ گستره یِ تغییرِ E'_1 رخ میدهد. دیده میشود

$$E_1(E'_1 = m_1) = \gamma\, m_1. \tag{64}$$

$$E_1(E'_1 = E'_{1\,\mathrm{max}}) = \gamma\, \gamma'_{1\,\mathrm{max}}\, (1 + v'_{1\,\mathrm{max}}\, v\, \cos\theta'_1)\, m_1. \tag{65}$$

پس $E_{1\,\mathrm{max}}$ بیشینه یِ این دُ-مقدار است. کمینه یِ E_1 در $E'_{1\,\mathrm{z}}$ رخ میدهد، اگر (63) براورده شود. اگر نَ، کمینه یِ E_1 هم مرزِ گستره یِ تغییرِ E'_1 رخ میدهد، یعنی $E_{1\,\mathrm{max}}$ کمینه یِ دُ-مقدارِ طرف-ِ-راستِ روابطِ (64) و (65) است.

خلاصه یِ اینها چنین میشود.

$$(v\,\cos\theta'_1) \le -v'_{1\,\max}, \tag{66}$$

$$E_{1\,\min} = \gamma\,\gamma'_{1\,\max}\,(1 + v'_{1\,\max}\,v\,\cos\theta'_1)\,m_1. \tag{67}$$

$$E_{1\,\max} = \gamma\,m_1. \tag{68}$$

$$-v'_{1\,\max} \le (v\,\cos\theta'_1) \le -\frac{1-\sqrt{1-v'^2_{1\,\max}}}{v'_{1\,\max}}, \tag{69}$$

$$E_{1\,\min} = \gamma\,\sqrt{1-(v\,\cos\theta'_1)^2}\,m_1. \tag{70}$$

$$E_{1\,\max} = \gamma\,m_1. \tag{71}$$

$$-\frac{1-\sqrt{1-v'^2_{1\,\max}}}{v'_{1\,\max}} \le (v\,\cos\theta'_1) \le 0, \tag{72}$$

$$E_{1\,\min} = \gamma\,\sqrt{1-(v\,\cos\theta'_1)^2}\,m_1. \tag{73}$$

$$E_{1\,\max} = \gamma\,\gamma'_{1\,\max}\,(1 + v'_{1\,\max}\,v\,\cos\theta'_1)\,m_1. \tag{74}$$

$$0 \le (v\,\cos\theta'_1), \tag{75}$$

$$E_{1\,\min} = \gamma\,m_1. \tag{76}$$

$$E_{1\,\max} = \gamma\,\gamma'_{1\,\max}\,(1 + v'_{1\,\max}\,v\,\cos\theta'_1)\,m_1. \tag{77}$$

البته ممکن است بعض ی از مقدارها یِ $(v\,\cos\theta'_1)$ ممکن نباشد. مثلَن اگر

$$v < v'_{1\,\max}, \tag{78}$$

آنگاه (66) رخ نمیدهد. همچنین، اگر

$$v < \frac{1-\sqrt{1-v'^2_{1\,\max}}}{v'_{1\,\max}}, \tag{79}$$

آنگاه (69) رخ نمیدهد.

3 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «واکنشها یِ نسبیتی یِ با دُ ذره یِ خروجی» (X1-151 (2020/10/29

[2] Lorentz