X1-154 (2021/02/19)

کوانتشِ نسبیتی، بر اساسِ کوانتشِ نانسبیتی

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

رابطه یِ پایستگی یِ انرژی بر حسبِ مکان و تکانه برا یِ یک سیستمِ نسبیتی، بر حسبِ رابطه ای مشابه برا یِ یک سیستمِ نانسبیتی نوشته میشود. به این ترتیب کوانتشِ سیستمِ اول را میشود بر حسبِ کوانتشِ سیستمِ دوم نوشت. به ویژه، کوانتشِ مسئله یِ نسبیتی یِ کِپلِر [1] بر حسبِ کوانتشِ مسئله یِ نانسبیتی یِ کِپلِر [1] بیان میشود. نتایجِ حاصل از کوانتشِ قدیم و کوانتشِ جدید، با آن چه از معادله یِ کْلَین-گُردُن [2] به دست میئاید و با آن چه از معادله یِ دیرَک [3] به دست میئاید مقایسه میشود.

1 پایستگی یِ انرژی برا یِ یک ذره یِ نسبیتی

ذره ای به جرمِ m در یک میدانِ برداری یِ خارجی یِ U حرکت میکند. لگرانژی یِ متناظر را با L نشان میدهم:

$$L = -c^2\, m\, \gamma^{-1} + U_0 + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{U}. \tag{1}$$

که $\boldsymbol{v}$ سرعتِ ذره و γ ضریبِ لُرِنتس [4] است:

$$\gamma = (1 - c^{-2}\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})^{1/2}. \tag{2}$$

حالت ی را بررسی میکنم که بخشِ فضایی یِ میدانِ برداری یِ خارجی صفر است:

$$\boldsymbol{U} = 0. \tag{3}$$

V را هم چنین تعریف میکنم.

$$V = -U_0. \tag{4}$$

به این ترتیب،

$$L = -c^2\, m\, \gamma^{-1} - V. \tag{5}$$

اینها را میشود در [5] و [6] یافت و، چنان که آنجاها آمده، V یک میدانِ اسکالر نیست، بل که بخشِ زمانی یِ یک میدانِ برداری ست.

تکانه ($\boldsymbol{p}$) چنین است.

$$p_j = \frac{\partial\, L}{\partial\, v^j}. \tag{6}$$

که با لگرانژی به شکلِ (5) چنین میشود.

$$\boldsymbol{p} = m\, \gamma\, \boldsymbol{v}. \tag{7}$$

انرژی (E) هم چنین است.

$$E = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - L. \tag{8}$$

که با لگرانژی به شکلِ (5) چنین میشود.

$$E = c^2\, m\, \gamma + V. \tag{9}$$

با حذفِ $\boldsymbol{v}$ بینِ (7) و (9)، این رابطه بینِ انرژی و تکانه به دست میئاید.

$$(E - V)^2 = c^2\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} + c^4\,m^2. \tag{10}$$

انرژی منها یِ انرژی یِ یک ذره یِ ساکنِ آزاد را با E' نشان میدهم:

$$E' = E - c^2\,m. \tag{11}$$

به این ترتیب (10) چنین میشود.

$$(E' - V)^2 + 2\,c^2\,m\,(E' - V) = c^2\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}. \tag{12}$$

یا،

$$E' + \frac{E'^2}{2\,c^2\,m} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}}{2\,m} + V + \frac{2\,E'\,V - V^2}{2\,c^2\,m}. \tag{13}$$

این هم ان رابطه یِ نانسبیتی یِ انرژی با تکانه است، برا یِ ذره ای که انرژی یَ ش $\tilde{E}$ و انرژی-یِ-پتانسیلَ ش $\tilde{V}$ است:

$$\tilde{E} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}}{2\,m} + \tilde{V}. \tag{14}$$

که،

$$\tilde{E} = E' + \frac{E'^2}{2\,c^2\,m}. \tag{15}$$

$$\tilde{V} = \left(1 + \frac{E'}{c^2\,m}\right)\,V - \frac{V^2}{2\,c^2\,m}. \tag{16}$$

اگر سیستم تقارنِ انتقال-ِ-زمان داشته باشد، انرژی یک ثابت-ِ-حرکت است. برا یِ سیستم ی که با لَگرانژی یِ (5) تُصیف میشود، شرطِ تقارنِ انتقال-ِ-زمان این است که m ثابت باشد و V هم بستگی یِ صریح به زمان نداشته باشد:

$$\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,t} = 0. \tag{17}$$

$$\frac{\partial\,V}{\partial\,t} = 0. \tag{18}$$

رابطه ی ِ (17) (این که جرم ِ ذره ثابت است) بدیهی فرض میشود. در این صورت شرط ِ تقارن ِ سیستم تحت ِ انتقال- ِ -زمان (18) است. وقت ی این شرط برقرار است، E ثابت میمانَد:

$$\frac{\mathrm{d}\,E}{\mathrm{d}\,t}=0. \tag{19}$$

. همچنین، اگر (17) و (18) برقرار باشند $\tilde{V}$ هم بستگی ی ِ صریح به زمان ندارد:

$$\frac{\partial\,\tilde{V}}{\partial\,t}=0. \tag{20}$$

و البته از (17) همراه با این که E ثابت میمانَد نتیجه میشود E' و $\tilde{E}$ هم ثابت میمانند:

$$\frac{\mathrm{d}\,E'}{\mathrm{d}\,t}=0. \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\tilde{E}}{\mathrm{d}\,t}=0. \tag{22}$$

پس وقت ی مسئله ی ِ نسبیتی تقارن ِ انتقال- ِ -زمان دارد، مسئله ی ِ نانسبیتی ی ِ متناظر هم تقارن ِ انتقال- ِ -زمان دارد و انرژی-ی ِ-نانسبیتی ی ِ متناظر ($\tilde{E}$) هم یک ثابت- ِ -حرکت است.

2 تقارن ِ دورانی و تکانه ی ِ زاویِئی

اگر سیستم تقارن ِ دورانی داشته باشد، تکانه ی ِ زاویِئی هم یک ثابت- ِ -حرکت است. با فرض ِ این که ذره ساختار ِ درونی ندارد، تکانه ی ِ زاویِئی هم ان تکانه-ی ِ-زاویِئی ی ِ مداری ست، که آن را با $\boldsymbol{L}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}. \tag{23}$$

که $\boldsymbol{r}$ مکان ِ ذره است. دیده میشود

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}=p_r^2+\frac{\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}}{r^2}. \tag{24}$$

که r طول ِ بردار ِ $\boldsymbol{r}$ است و p_r مئلفه ی ِ شعاعی ی ِ تکانه است:

$$p_r=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L}}{r}. \tag{25}$$

رابطه یِ (13) چنین میشود.

$$E' + \frac{E'^2}{2\,c^2\,m} = \frac{p_r^2}{2\,m} + \frac{\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}}{2\,m\,r^2} + V + \frac{2\,E'\,V - V^2}{2\,c^2\,m}. \tag{26}$$

سیستم تقارنِ دورانی دارد، وقت ی V تابعِ جهتِ $\boldsymbol{r}$ نباشد. در این حالت رابطه یِ بالا را چنین مینویسیم.

$$\tilde{E} = \frac{p_r^2}{2\,m} + \tilde{V}_{\text{eff}}. \tag{27}$$

که $\tilde{V}_{\text{eff}}$ انرژی-یِ-پتانسیلِ مئثر است:

$$\tilde{V}_{\text{eff}} = \frac{\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}}{2\,m\,r^2} + V + \frac{2\,E'\,V - V^2}{2\,c^2\,m}. \tag{28}$$

یا،

$$\tilde{V}_{\text{eff}} = \frac{\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}}{2\,m\,r^2} + \tilde{V}. \tag{29}$$

رابطه یِ (27) هم ان رابطه یِ نانسبیتی برا یِ حرکتِ شعاعی ست، البته با انرژی یِ $\tilde{E}$ و انرژی-یِ-پتانسیل-ِ-مئثرِ $\tilde{V}$.

3 مسئله یِ کِپلِر

به مسئله ای که انرژی-ِ-پتانسیلِ متناظر با آن متناسب با عکسِ فاصله است مسئله یِ کِپلِر [1] میگویم. برا یِ چنین مسئله ای،

$$V = \frac{b}{r}. \tag{30}$$

که b یک ثابت است. نیرو یِ متناظر جاذبه (به سو یِ مبدئ) است، وقت ی

$$b < 0. \tag{31}$$

دیده میشود برا یِ مسئله یِ کِپلِر [1]،

$$V_{\text{eff}} = \frac{\tilde{\boldsymbol{L}}\cdot\tilde{\boldsymbol{L}}}{2\,m\,r^2} + \frac{\tilde{b}}{r}. \tag{32}$$

که

$$\tilde{b} = \left(1 + \frac{E'}{c^2\,m}\right)\,b. \tag{33}$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}} \cdot \tilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L} - \frac{b^2}{c^2}. \tag{34}$$

این یعنی مسئله-یِ-کِپلِر [1] ِ نسبیتی، هم ان مسئله-یِ-کِپلِر [1] ِ نانسبیتی ست، اما با پارامترها یی متفارت: رابطه یِ $\tilde{E}$ با $\tilde{b}$ و $(\tilde{\boldsymbol{L}} \cdot \tilde{\boldsymbol{L}})$ هم ان رابطه یِ نانسبیتی ست.

4 کوانتش ِ قدیم برا یِ مسئله-یِ-کِپلِر ِ نانسبیتی

روابط ِ کوانتش ِ قدیم، برا یِ انرژی-یِ-پتانسیلها یِ دورانی-متقارن چنین است.

$$L = \hbar\,\ell. \tag{35}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}\,r\,p_r = \pi\,\hbar\,n'. \tag{36}$$

L اندازه یِ تکانه-یِ-زاویئی، و رابطه یِ (35) هم ان کوانتش ِ تکانه-یِ-زاویئی ست. در رابطه یِ (36) هم، n' عدد ِ کوانتمی یِ شعاعی ست، و r_1 و r_2 نقطه-یِ-بازگشتها یِ کلاسیک َند. برا یِ مسئله-یِ-کِپلِر ِ نانسبیتی،

$$E = \frac{p_r^2}{2\,m} + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + \frac{b}{r}. \tag{37}$$

به این ترتیب،

$$p_r = \sqrt{2\,m\,\left[E - \frac{L^2}{2\,m\,r^2} - \frac{b}{r}\right]}. \tag{38}$$

حالت ِ مقید رخ میدهد (سیستم 2 نقطه-یِ-بازگشت ِ کلاسیک دارد) اگر و تنها اگر (31) برقرار باشد (نیرو جاذبه باشد) و انرژی منفی باشد:

$$E < 0. \tag{39}$$

از این پس فرض میکنم چنین است، یعنی (31) و (39) برقرار‌َند. دیده میشود

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}\, r\, p_r = L \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}\, r \sqrt{-\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\,\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)}. \qquad (40)$$

و

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -\frac{2\, m\, b}{L^2}. \qquad (41)$$

$$\frac{1}{r_1}\,\frac{1}{r_2} = -\frac{2\, m\, E}{L^2}. \qquad (42)$$

این تغییر- ِ-متغیر را به کار میبرم.

$$\frac{1}{r} = u_0\,(1 + \varepsilon\, \cos\theta). \qquad (43)$$

که پارامترها یِ u_0 و ε با این روابط تعریف میشوند.

$$\frac{1}{r_1} = u_0\,(1 + \varepsilon). \qquad (44)$$

$$\frac{1}{r_2} = u_0\,(1 - \varepsilon). \qquad (45)$$

به این ترتیب،

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}\, r\, p_r = L \int_0^{\pi} \mathrm{d}\,\theta\, \frac{\varepsilon^2\, \sin^2\theta}{(1 + \varepsilon\, \cos\theta)^2}. \qquad (46)$$

یا، با انتگرال-گیری یِ جزئ-به-جزئ،

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}\, r\, p_r = -L \int_0^{\pi} \mathrm{d}\,\theta\, \frac{\varepsilon\, \cos\theta}{1 + \varepsilon\, \cos\theta}. \qquad (47)$$

یا،

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}\, r\, p_r = L\, \left(-\pi + \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\,\theta}{1 + \varepsilon\, \cos\theta}\right). \qquad (48)$$

که نتیجه میدهد

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}\, r\, p_r = \pi\, L\, \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right). \qquad (49)$$

پس شرط- ِ-کوانتشِ (36) چنین میشود.

$$L\left(-1+\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)=\hbar\,n'. \tag{50}$$

یا،

$$1-\varepsilon^2=\frac{L^2}{(L+\hbar\,n')^2}. \tag{51}$$

با استفاده از (41) و (42) و (44) و (45)، نتیجه میشود

$$1-\varepsilon^2=-\frac{2\,L^2\,E}{m\,b^2}. \tag{52}$$

پس،

$$E=-\frac{m\,b^2}{2\,(L+\hbar\,n')^2}. \tag{53}$$

پارامترِ بی-بُعدِ ξ را چنین تعریف میکنم.

$$\xi=\frac{-b}{\hbar\,c}. \tag{54}$$

و شرط- ِ-کوانتشِ (35) را در (53) میگذارم:

$$\frac{E}{c^2\,m}=-\frac{\xi^2}{2\,(\ell+n')^2}. \tag{55}$$

چیز ی که از کوانتم-مکانیک (ِ جدید) به دست میائید (مثلَن فصلِ 13 از [7]) این است.

$$\frac{E}{c^2\,m}=-\frac{\xi^2}{2\,(\ell+n'+1)^2}. \tag{56}$$

5 کوانتشِ قدیم برا یِ مسئله-یِ-کِپلِرِ نسبیتی

برا یِ مسئله یِ نسبیتی، میشود هم ان رابطه یِ (53) را به کار برد، که در آن (E,b,L) به $(\tilde{E},\tilde{b},\tilde{L})$ تبدیل شده اند: روابطِ (15) و (33) و (34). تبدیلِ (b,L) به $(\tilde{b},\tilde{L})$ را هم میشود بر حسبِ تبدیلِ

(ξ, ℓ) به $(\tilde{\xi}, \tilde{\ell})$ نوشت:

$$\tilde{\xi} = \left(1 + \frac{E'}{c^2\, m}\right)\, \xi. \tag{57}$$

$$\tilde{\ell}^2 = \ell^2 - \xi^2. \tag{58}$$

به این ترتیب، (55) چنین میشود.

$$\frac{E'}{c^2\, m} + \frac{1}{2}\, \left(\frac{E'}{c^2\, m}\right)^2 = -\left(1 + \frac{E'}{c^2\, m}\right)^2\, \frac{\xi^2}{2\, (\sqrt{\ell^2 - \xi^2} + n')^2}. \tag{59}$$

یا،

$$\left(1 + \frac{E'}{c^2\, m}\right)^2 - 1 = -\left(1 + \frac{E'}{c^2\, m}\right)^2\, \frac{\xi^2}{(\sqrt{\ell^2 - \xi^2} + n')^2}. \tag{60}$$

که میشود

$$\left(\frac{E}{c^2\, m}\right)^2 - 1 = -\left(\frac{E}{c^2\, m}\right)^2\, \frac{\xi^2}{(\sqrt{\ell^2 - \xi^2} + n')^2}. \tag{61}$$

این هم نتیجه میدهد

$$\frac{E}{c^2\, m} = \left[1 + \frac{\xi^2}{(\sqrt{\ell^2 - \xi^2} + n')^2}\right]^{-1/2}. \tag{62}$$

که تا مرتبه یِ 2 نسبت به ξ چنین میشود.

$$\frac{E}{c^2\, m} = 1 - \frac{\xi^2}{2\, (\ell + n')^2} + \cdots. \tag{63}$$

یا،

$$\frac{E'}{c^2\, m} = -\frac{\xi^2}{2\, (\ell + n')^2} + \cdots. \tag{64}$$

برا یِ رسیدن به (58) از (34)، رابطه یِ (35) به کار رفت. اما شکلِ دقیقِ (کوانتم-مکانیک-ِ-جدیدی یِ) رابطه یِ $\boldsymbol{L}$ با ℓ چنین است.

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L} = \hbar^2\, \ell\, (\ell + 1). \tag{65}$$

با این شکل، رابطه یِ (58) تبدیل میشود به

$$\tilde{\ell}\,(\tilde{\ell}+1) = \ell\,(\ell+1) - \xi^2. \tag{66}$$

یعنی،

$$\underline{\tilde{\ell}} = \sqrt{\underline{\ell}^2 - \xi^2}. \tag{67}$$

که، $\underline{\mathfrak{X}}$ چنین تعریف شده.

$$\underline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} - \frac{1}{2}. \tag{68}$$

به این ترتیب رابطه یِ (56)، که از کوانتم-مکانیکِ جدید به دست میئاید، به این تبدیل میشود.

$$\frac{E}{c^2\,m} = \left[1 + \frac{\xi^2}{(\sqrt{\underline{\ell}^2 - \xi^2} + \underline{n}')^2}\right]^{-1/2}. \tag{69}$$

و البته تا مرتبه یِ 2 نسبت به ξ،

$$\frac{E'}{c^2\,m} = -\frac{\xi^2}{2\,(\underline{\ell} + \underline{n}')^2} + \cdots\,. \tag{70}$$

یعنی،

$$\frac{E'}{c^2\,m} = -\frac{\xi^2}{2\,(\ell + n' + 1)^2} + \cdots\,. \tag{71}$$

6 مقایسه یِ کوانتشِ قدیم با جوابها یِ دقیق

آن چه از معادله یِ کْلَین-گُردُن [2] برا یِ ترازها-یِ-انرژی در مسئله یِ کِپلِر [1] به دست میئاید (مثلَن فصلِ 3 از [8]) هم ان رابطه یِ (69) است. نتیجه یِ حاصل از معادله یِ دیرَک [3] برا یِ ترازها-یِ-انرژی در مسئله یِ کِپلِر [1] هم (مثلَن فصلِ 8 از [8]) این است.

$$\frac{E}{c^2\,m} = \left[1 + \frac{\xi^2}{(\sqrt{\underline{j}^2 - \xi^2} + n')^2}\right]^{-1/2}. \tag{72}$$

که j عددِ کوانتمی یِ متناظر با تکانه-یِ-زاویِئی یِ کل است:

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}=\hbar^2\,j\,(j+1). \tag{73}$$

و $\boldsymbol{J}$ تکانه-یِ-زاویِئی یِ کل است.

خلاصه:

$$\frac{E_{\mathrm{O}}}{c^2\,m}=\left[1+\frac{\xi^2}{(\sqrt{\ell^2-\xi^2}+n')^2}\right]^{-1/2}. \tag{74}$$

$$\frac{E_{\mathrm{N}}}{c^2\,m}=\left[1+\frac{\xi^2}{(\sqrt{\underline{\ell}^2-\xi^2}+\underline{n}')^2}\right]^{-1/2}. \tag{75}$$

$$\frac{E_{\mathrm{KG}}}{c^2\,m}=\left[1+\frac{\xi^2}{(\sqrt{\underline{\ell}^2-\xi^2}+\underline{n}')^2}\right]^{-1/2}. \tag{76}$$

$$\frac{E_{\mathrm{D}}}{c^2\,m}=\left[1+\frac{\xi^2}{(\sqrt{\underline{j}^2-\xi^2}+n')^2}\right]^{-1/2}. \tag{77}$$

شاخصها یِ O و N یعنی کوانتم-مکانیکِ قدیم: O متناظر با (58)، و N متناظر با (67) است. شاخصها یِ KG و D هم متناظر با، به ترتیب، معادله یِ کْلَین-گُردُن [2] و معادله یِ دیرَک [3] اند. دیده میشود

$$E_{\mathrm{KG}}=E_{\mathrm{N}}. \tag{78}$$

$$E_{\mathrm{D}}=E_{\mathrm{O}},\quad \ell=\underline{j}. \tag{79}$$

7 پانوشتها

[1] Kepler

[2] Klein-Gordon

[3] Dirac

[4] Lorentz

[5] محمد خرمی؛ «یک ذره یِ نسبیتی در یک میدانِ اسکالر» (2010/10/21) X1-71

[6] محمد خرمی؛ «یک ذره یِ نسبیتی در میدانها یِ خارجی» (2013/04/25) X1-91

[7] Ramamurti Shankar; "Principles of quantum mechanics" 2nd edition (Plenum press, 1994)

[8] Paul Strange; "Relativistic quantum mechanics" (Cambridge University Press, 1998)