X1-156 (2021/05/28)

چگالی یِ احتمال، و تابعِ مولد II

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

چهره و چهره یِ مئثر معرفی میشوند. حالت ی که تُزیعِ احتمال تیز است، و مثالِ تُزیعِ گاؤسی بررسی میشوند.

0 قراردادها

هم ان نمادگذاری و قراردادها یِ [1] به کار میرود: چگالی یِ احتمال برا یِ متغیرِ تصادفی یِ x را با ρ_x نشان میدهم.

$$\rho_x(\xi) = \langle\delta(\xi - x)\rangle. \tag{1}$$

که $\langle\rangle$، مقدارِ چشمداشتی یِ $[f(x)]$، چنین تعریف میشود.

$$\langle f(x)\rangle = \int \mathrm{d}\,\xi\,\rho_x(\xi)\,f(\xi). \tag{2}$$

از این پس فرض میکنم متغیر- ِ-تصادفیها یی که با آنها کار میکنم اسکالر َند و مقدارها یِ شان حقیقی ست. میانگینِ x را با $[\mu(x)]$ و وردایی یِ x را با $[V(x)]$ نشان میدهم:

$$\mu(x) = \langle x\rangle. \tag{3}$$

$$V(x) = \langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle. \tag{4}$$

یا،

$$V(x) = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2. \tag{5}$$

تابعِ مولد برا یِ متغیرِ تصادفی یِ x را با Z_x نشان میدهم:

$$Z_x(u) = \langle \exp(u\,x)\rangle. \tag{6}$$

دیده میشود

$$Z_x^{(m)}(0) = \mu_m(x). \tag{7}$$

که $\mu_m(x)$ گشتاورِ m ُمِ x است:

$$\mu_m(x) = \langle x^m\rangle. \tag{8}$$

از جمله،

$$\mu_0 = 1. \tag{9}$$

$$\mu_1 = \mu. \tag{10}$$

$$\mu_2 = V + \mu^2. \tag{11}$$

لگاریتمِ تابع- ِ-مولد را با W نشان میدهم:

$$W_x = \ln\, Z_x. \tag{12}$$

به W_x همبند-مولدِ x میگویم. مشتقِ m اُمِ W_x در 0 را با $c_m(x)$ نشان میدهم:

$$W_x^{(m)}(0) = c_m(x). \tag{13}$$

به $c_m(x)$ همبند-گشتاورِ m اُمِ x میگویم. رُشن است که $[c_1(x), \dots, c_m(x)]$ تابع ی وارون-پذیر از $[\mu_1(x), \dots, \mu_m(x)]$ است. از جمله دیده میشود

$$c_0 = 0. \tag{14}$$

$$c_1 = \mu. \tag{15}$$

$$c_2 = V. \tag{16}$$

1 چهره یِ مئثر

چهره را با $\mathcal{E}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\rho = \mathcal{N}\ \exp(\mathcal{E}). \tag{17}$$

$\mathcal{N}$ یک ثابتِ مثبت است که با ρ هم-بُعد است، چنان که انتگرالِ ρ یک است:

$$1 = \mathcal{N} \int \mathrm{d}\,\xi\ \exp[\mathcal{E}(\xi)]. \tag{18}$$

تابعِ ϕ را با این رابطه تعریف میکنم.

$$\mathcal{E}^{(1)}(\phi) + u = 0. \tag{19}$$

مقدارِ $\mathfrak{X}$ به ازا یِ $(u = 0)$ را با $\mathfrak{X}_0$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$\mathcal{E}^{(1)}(\phi_0) = 0. \tag{20}$$

یا،

$$\mathcal{E}_0^{(1)} = 0. \tag{21}$$

بر حسبِ چهره، تابع- ِ-مولد چنین میشود

$$Z(u)=\mathcal{N}\int \mathrm{d}\,\xi\ \exp[\mathcal{E}(\xi)+u\,\xi]. \qquad (22)$$

یا،

$$Z(u)=\exp[\mathcal{E}(\phi)+u\,\phi+\tilde{W}(u)]. \qquad (23)$$

که،

$$\exp[\tilde{W}(u)]=\mathcal{N}\int \mathrm{d}\,\xi\ \exp[\mathcal{E}(\xi)-\mathcal{E}(\phi)+u\,(\xi-\phi)]. \qquad (24)$$

رُشن است که

$$Z_0=1. \qquad (25)$$

$$W_0=0. \qquad (26)$$

از (23) دیده میشود

$$W(u)=\mathcal{E}(\phi)+u\,\phi+\tilde{W}(u). \qquad (27)$$

مشتقِ W نسبت به u را با χ نشان میدهم:

$$\chi=W^{(1)}(u). \qquad (28)$$

از جمله،

$$\chi_0=W_0^{(1)}. \qquad (29)$$

رابطه یِ (27) را در (28) میگذارم:

$$\chi(u)=[\mathcal{E}^{(1)}(\phi)+u]\,\frac{\mathrm{d}\,\phi}{\mathrm{d}\,u}+\phi+\tilde{W}^{(1)}(u). \qquad (30)$$

از (19) دیده میشود جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (30) صفر است. پس،

$$\chi = \phi + \tilde{\chi}, \tag{31}$$

که،

$$\tilde{\chi} = \tilde{W}^{(1)}. \tag{32}$$

مبدَل- ِ-لُژاندر [2] ِ همبند- مولد را با Γ نشان میدهم:

$$\Gamma(\chi) = W(u) - u\,\chi. \tag{33}$$

به Γ چهره- یِ- مئثر میگویم. دیده میشود

$$\Gamma_0 = 1. \tag{34}$$

همچنین،

$$\Gamma^{(1)}(\chi) = [W^{(1)}(u) - \chi]\,\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,\chi} - u. \tag{35}$$

از (28) نتیجه میشود جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (35) صفر است. پس،

$$\Gamma^{(1)}(\chi) = -u. \tag{36}$$

از (13) و (15) معلوم است که

$$\mu = W_0^{(1)}. \tag{37}$$

که، با استفاده از (29)، میشود

$$\mu = \chi_0. \tag{38}$$

از (36) دیده میشود

$$\Gamma^{(1)}(\chi_0) = 0. \tag{39}$$

پس میانگین (گشتاورِ اول) این معادله را برمیئاوَرَد.

$$\Gamma^{(1)}(\mu) = 0. \tag{40}$$

البته (39) ضمنَن این است.

$$\Gamma_0^{(1)} = 0. \tag{41}$$

$\mathcal{N}$ و $\mathcal{E}$، از (17) به طُرِ یکتا تعریف نمیشوند. میشود $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ را چنین تبدیل کرد.

$$\mathcal{N} \to \mathcal{N}\ \exp(\mathfrak{e}). \tag{42}$$

$$\mathcal{E} \to \mathcal{E} - \mathfrak{e}. \tag{43}$$

که $\mathfrak{e}$ یک ثابت است. با این تبدیل W و Γ عوض نمیشوند، اما $\tilde{W}$ با یک ثابتِ جمعی عوض میشود:

$$\tilde{W} \to \tilde{W} + \mathfrak{e}. \tag{44}$$

و البته مشتقها یِ $\mathcal{E}$ و $\tilde{W}$ عوض نمیشوند.

یک انگیزه برا یِ اسمِ چهره-یِ-مئثر این است. با گذاشتنِ (27) در (33) نتیجه میشود

$$\Gamma(\chi) = \mathcal{E}(\phi) + u\,(\phi - \chi) + \tilde{W}(u). \tag{45}$$

همچنین،

$$\Gamma(\phi) = \Gamma(\chi) + [\Gamma^{(1)}(\chi)]\,(\phi - \chi) + o(\phi - \chi). \tag{46}$$

رابطه یِ (45) را در (46) میگذارم و (31) و (36) را به کار میبَرَم. نتیجه میشود

$$\Gamma(\phi) = \mathcal{E}(\phi) + \tilde{W}(u) + o(\tilde{\chi}). \tag{47}$$

دیده میشود اگر کمیتها یِ ابرو-دار صفر باشند، Γ هم ان $\mathcal{E}$ است.

2 تندترین شیب

حالت ی را بررسی میکنم که تغییراتِ چهره شدید است. در این حالت چگالی-یِ-احتمال و مولدها با رفتارِ چهره در نزدیکی یِ نقطه ای که چهره را بیشینه میکند تعیین میشوند. گیرم این نقطه در مرزِ دامنه یِ چهره نیست و چهره در این نقطه مشتق-پذیر است. در نتیجه مشتقِ چهره در این نقطه صفر است. پس این نقطه هم ان ϕ_0 است. اگر هم $\mathcal{E}^{(1)}$ در بیش از یک نقطه صفر شد، ϕ_0 را جا یی میگیرم که $\mathcal{E}$ بیشینه یِ مطلق است.

شدید-بودنِ تغییراتِ چهره را میشود بر حسبِ یک پارامترِ کوچک (α) بیان کرد:

$$\mathcal{E} = \alpha^{-1}\,\widehat{\mathcal{E}}. \tag{48}$$

که $\widehat{\mathcal{E}}$ مستقل از α است. رابطه یِ (19) چنین میشود.

$$\widehat{\mathcal{E}}^{(1)}(\phi) + \alpha\,u = 0. \tag{49}$$

دیده میشود

$$\widehat{\mathcal{E}}_0^{(1)} = 0. \tag{50}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\phi}{\mathrm{d}\,u} = -\alpha\,[\widehat{\mathcal{E}}^{(2)}(\phi)]^{-1}. \tag{51}$$

رابطه یِ (24) هم چنین میشود.

$$\exp[\tilde{W}(u)] = \mathcal{N}\int \mathrm{d}\,\xi\,\exp\left\{\alpha^{-1}\,\frac{\widehat{\mathcal{E}}^{(2)}(\phi)}{2}\,(\xi-\phi)^2 + \alpha^{-1}\,O[(\xi-\phi)^3]\right\}. \tag{52}$$

متغیرِ $\mathfrak{x}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\xi = \phi + \alpha^{1/2}\,\mathfrak{x}. \tag{53}$$

به این ترتیب،

$$\exp[\tilde{W}(u)] = \alpha^{1/2}\,\mathcal{N}\int \mathrm{d}\,\mathfrak{x}\,\exp\left[\frac{\widehat{\mathcal{E}}^{(2)}(\phi)}{2}\,\mathfrak{x}^2 + \alpha^{-1}\,O(\alpha^{3/2}\,\mathfrak{x}^3)\right]. \tag{54}$$

که نتیجه میدهد

$$\exp[\tilde{W}(u)] = \left[-\frac{\widehat{\mathcal{E}}^{(2)}(\phi)}{2\,\pi\,\alpha\,\mathcal{N}^2}\right]^{-1/2}\,[1+O(\alpha)]. \tag{55}$$

این که در کروشه یِ دوم جملاتِ متناسب با توانها یِ ناصحیحِ α نیست، از اینجا میئاید که انتگرالِ یک توانِ فرد از $\mathfrak{x}$ ضربِ در یک تابعِ گاؤسی یِ زُج از $\mathfrak{x}$ صفر است. از رابطه یِ (55) نتیجه میشود

$$\tilde{W}(u) = \tilde{\mathfrak{W}}(\phi) + O(\alpha). \tag{56}$$

که،

$$\tilde{\mathfrak{W}}(\phi) = -\frac{1}{2}\,\ln\left[-\frac{\widehat{\mathcal{E}}^{(2)}(\phi)}{2\,\pi\,\alpha\,\mathcal{N}^2}\right]. \tag{57}$$

این را در (27) میگذارم:

$$W(u) = \alpha^{-1}\,\widehat{\mathcal{E}}(\phi) + u\,\phi - \frac{1}{2}\,\ln\left[-\frac{\widehat{\mathcal{E}}^{(2)}(\phi)}{2\,\pi\,\alpha\,\mathcal{N}^2}\right] + O(\alpha). \tag{58}$$

از (56)، همراه با (32)، نتیجه میشود

$$\tilde{\chi} = [\tilde{\mathfrak{W}}^{(1)}(\phi)]\,\frac{\mathrm{d}\,\phi}{\mathrm{d}\,u} + O(\alpha). \tag{59}$$

که، با استفاده از (51)، چنین میشود.

$$\tilde{\chi} = -\alpha\,[\tilde{\mathfrak{W}}^{(1)}(\phi)]\,[\widehat{\mathcal{E}}^{(2)}(\phi)]^{-1} + O(\alpha). \tag{60}$$

خُدِ $\tilde{\mathfrak{W}}$ به α وابسته است. اما وابستگی یِ $\tilde{\mathfrak{W}}$ به α جمعی ست: $\tilde{\mathfrak{W}}$ مجموعِ دُ بخش است که یک ی مستقل از α و دیگر ی مستقل از ϕ است. مشتقِ $\tilde{\mathfrak{W}}$ نسبت به ϕ شاملِ α نیست. پس (60) نتیجه میدهد

$$\tilde{\chi} = O(\alpha). \tag{61}$$

چهره-یِ-مئثر هم، از (45)، چنین میشود.

$$\Gamma(\chi) = \alpha^{-1}\,\widehat{\mathcal{E}}(\phi) - u\,\tilde{\chi} + \tilde{W}(u). \tag{62}$$

یا،

$$\Gamma(\chi) = \alpha^{-1}\,\widehat{\mathcal{E}}(\phi) + \Gamma^{(1)}\,\tilde{\chi} + \tilde{W}(u). \tag{63}$$

پس،

$$\Gamma(\phi) = \alpha^{-1}\,\widehat{\mathcal{E}}(\phi) + \tilde{W}(u) - \frac{\Gamma^{(2)}(\bar{\phi})}{2}\,(\tilde{\chi})^2. \tag{64}$$

که $\bar{\phi}$ بینِ ϕ و χ است. دیده میشود

$$\Gamma^{(2)} = O(\alpha^{-1}). \tag{65}$$

از این و (61) نتیجه میشود جمله یِ آخرِ طرفِ راستِ (64) مثلِ α یا سریعتر از آن صفر میشود. پس،

$$\Gamma(\phi) = \alpha^{-1}\,\widehat{\mathcal{E}}(\phi) + \tilde{W}(u) + O(\alpha). \tag{66}$$

یا،

$$\Gamma(\phi) = \alpha^{-1}\,\widehat{\mathcal{E}}(\phi) + \tilde{\mathfrak{W}}(\phi) + O(\alpha). \tag{67}$$

مقدارِ چشم-داشتی یِ متغیرِ تصادفی، جا یی ست که Γ فرینه (بیشینه) میشود. وقت ی تُزیع تیز است (α کوچک است)، اینجا نزدیکِ هم ان جا یی ست که چهره فرینه (بیشینه) میشود.

3 تُزیعِ گاؤسی

برا یِ تُزیعِ گاؤسی،

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,V}}\ \exp\left[-\frac{(\xi-\mu)2}{2\,V}\right]. \tag{68}$$

$$W(u) = \mu\,u + \frac{V\,u^2}{2}. \tag{69}$$

از (68) نتیجه میشود

$$\mathcal{E}(\xi) = -\frac{(\xi - \mu)2}{2\,V} - \mathfrak{c}. \tag{70}$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,V}}\;\exp(\mathfrak{c}). \tag{71}$$

که $\mathfrak{c}$ یک ثابت است. از (69) هم دیده میشود

$$\chi = \mu + V\,u. \tag{72}$$

$$\Gamma(\chi) = -\frac{V\,u^2}{2}. \tag{73}$$

که یعنی،

$$\Gamma(\chi) = -\frac{(\chi - \mu)2}{2\,V}. \tag{74}$$

پس $(\Gamma - \mathcal{E})$ یک ثابت است:

$$\Gamma = \mathcal{E} + \mathfrak{c}. \tag{75}$$

از جمله Γ هم ان $\mathcal{E}$ است، اگر $\mathfrak{c}$ صفر انتخاب شود.

4 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «چگالی یِ احتمال، و تابعِ مولد I» (2021/04/24) X1-155

[2] Legendre