X1-157 (2021/07/22)

چگالی یِ احتمال، و تابعِ مولد III

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

تُزیعِ احتمال برا یِ مجموعِ چند متغیرِ تصادفی یِ یکسان و نابسته بررسی میشود. رفتارِ مجانی یِ این تُزیع، برا یِ حالت ی که تعدادِ متغیرها زیاد میشود بررسی میشود و تصحیحات نسبت به تُزیعِ گاؤسی به دست میئاید.

0 قراردادها

هم ان نمادگذاری و قراردادها یِ [1] به کار میرود: چگالی یِ احتمال برا یِ متغیرِ تصادفی یِ x را با ρ_x نشان میدهم.

$$\rho_x(\xi) = \langle \delta(\xi - x) \rangle. \tag{1}$$

که $\langle f(x) \rangle$، مقدارِ چشمداشتی یِ $[f(x)]$، چنین تعریف میشود.

$$\langle f(x) \rangle = \int \mathrm{d}\,\xi\, \rho_x(\xi)\, f(\xi). \tag{2}$$

از این پس فرض میکنم متغیر- ِ-تصادفیها یی که با آنها کار میکنم اسکالر َند و مقدارها یِ شان حقیقی ست. میانگینِ x را با $[\mu(x)]$ و وردایی یِ x را با $[V(x)]$ نشان میدهم:

$$\mu(x) = \langle x \rangle. \tag{3}$$

$$V(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle. \tag{4}$$

یا،

$$V(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \tag{5}$$

تابعِ مولد برا یِ متغیرِ تصادفی یِ x را با Z_x نشان میدهم:

$$Z_x(u) = \langle \exp(u\, x) \rangle. \tag{6}$$

دیده میشود

$$Z_x^{(m)}(0) = \mu_m(x). \tag{7}$$

که $\mu_m(x)$ گشتاورِ m ُمِ x است:

$$\mu_m(x) = \langle x^m \rangle. \tag{8}$$

از جمله،

$$\mu_0 = 1. \tag{9}$$

$$\mu_1 = \mu. \tag{10}$$

$$\mu_2 = V + \mu^2. \tag{11}$$

لگاریتمِ تابع- ِ-مولد را با W نشان میدهم:

$$W_x = \ln\, Z_x. \tag{12}$$

به W_x همبند-مولد ِ x میگویم. مشتق ِ m ُم ِ W_x در 0 را با $c_m(x)$ نشان میدهم:

$$W_x^{(m)}(0) = c_m(x). \tag{13}$$

به $c_m(x)$ همبند-گشتاور ِ m ُم ِ x میگویم. رُشن است که $[c_1(x), \ldots, c_m(x)]$ تابع ی وارون-پذیر از $[\mu_1(x), \ldots, \mu_m(x)]$ است. از جمله دیده میشود

$$c_0 = 0. \tag{14}$$

$$c_1 = \mu. \tag{15}$$

$$c_2 = V. \tag{16}$$

کمیتها یِ متناظر با متغیر- ِ-تصادفی یِ $(x - \langle x\rangle)$ را با پریم نشان میدهم:

$$\rho'_x(\xi) = \rho_x(\xi + \langle x\rangle). \tag{17}$$

$$Z'_x(u) = \exp(-\langle x\rangle\, u)\, Z_x(u). \tag{18}$$

$$W'_x(u) = -\langle x\rangle\, u + W_x(u). \tag{19}$$

$$\mu'_m(x) = \mu_m(x - \langle x\rangle). \tag{20}$$

$$c'_m(x) = c_m(x - \langle x\rangle). \tag{21}$$

به (همبند-)گشتاور ِ m ُم ِ $(x - \langle x\rangle)$ (همبند-)انحراف ِ m ُم ِ x میگویم. دیده میشود

$$c_m = c'_m + \mu\, \delta^1_m. \tag{22}$$

به این ترتیب همبند-گشتاورها یِ x هم ان همبند-انحرافها یِ x اند، جز همبند-گشتاور ِ اول. از جمله،

$$c'_1 = 0. \tag{23}$$

$$V' = V. \tag{24}$$

1 انحراف از تُزیعِ گاؤسی

مولدها و چگالی-یِ-احتمالِ متناظر با یک تُزیعِ گاؤسی را با شاخصِ 0 نشان میدهم:

$$W_0'(u) = \frac{V\,u^2}{2}. \tag{25}$$

$$\rho_0'(\xi) = \int \frac{\mathrm{d}\,k}{2\,\pi}\,\exp(\mathrm{i}\,k\,\xi)\,\exp[W_0'(-\mathrm{i}\,k)]. \tag{26}$$

پس،

$$\rho_0'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,V}}\,\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\,V}\right). \tag{27}$$

همچنین،

$$W'(u) = W_0'(u) + W_{\mathrm{I}}(u). \tag{28}$$

که،

$$W_{\mathrm{I}}(u) = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{c_m\,u^m}{m!}. \tag{29}$$

دیده میشود اگر

$$f(\xi) = \int \frac{\mathrm{d}\,k}{2\,\pi}\,A(k)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,\xi)\,B(k), \tag{30}$$

آنگاه،

$$f = A(-\mathrm{i}\,\mathrm{D})\,g. \tag{31}$$

که D مشتق-گیری ست، و

$$g(\xi) = \int \frac{\mathrm{d}\,k}{2\,\pi}\,\exp(\mathrm{i}\,k\,\xi)\,B(k). \tag{32}$$

به این ترتیب،

$$\rho' = \exp[W_{\mathrm{I}}(-\mathrm{D})]\,\rho_0'. \tag{33}$$

2 چگالی یِ احتمال برا یِ مجموعِ چند متغیرِ تصادفی یِ نابسته

متغیرِ تصادفی یِ y را مجموعِ چند متغیرِ تصادفی یِ (x_j ها) تعریف میکنم.

$$y = \sum_j x_j. \tag{34}$$

به این ترتیب،

$$Z_y(u) = \left\langle \exp\left(u \sum_j x_j\right)\right\rangle. \tag{35}$$

یا،

$$Z_y(u) = \left\langle \prod_j \exp(u\, x_j)\right\rangle. \tag{36}$$

از اینجا به بعد x_j ها را نابسته میگیرم. پس،

$$\left\langle \prod_j \mathfrak{f}_j(x_j)\right\rangle = \prod_j \langle \mathfrak{f}_j(x_j)\rangle. \tag{37}$$

که نتیجه میدهد

$$Z_y(u) = \prod_j \langle \exp(u\, x_j)\rangle. \tag{38}$$

یعنی،

$$Z_y(u) = \prod_j Z_{x_j}(u). \tag{39}$$

و این هم نتیجه میدهد

$$W_y(u) = \sum_j W_{x_j}(u). \tag{40}$$

دیده میشود

$$\langle y\rangle = \sum_j \langle x_j\rangle. \tag{41}$$

پس،

$$Z'_y(u) = \prod_j Z'_{x_j}(u). \tag{42}$$

$$W'_y(u) = \sum_j W'_{x_j}(u). \tag{43}$$

3 وقت یِ چگالی-یِ-احتمالِ متغیرها یِ تصادفیِ یکسان است

گیریم چگالی-یِ-احتمالِ متغیر-ِ-تصادفیها یِ x_j یکسان است. ρ_{x_j} ها را با ρ_x نشان میدهم:

$$\rho_{x_j} = \rho_x. \tag{44}$$

تعدادِ x_j ها را با n نشان میدهم. رابطِها یِ (39) و (40) چنین میشوند.

$$Z_y = (Z_x)^n. \tag{45}$$

$$W_y = n\,W_x. \tag{46}$$

رابطِها یِ (42) و (43) هم چنین میشود.

$$Z'_y = (Z'_x)^n. \tag{47}$$

$$W'_y = n\,W'_x. \tag{48}$$

گشتاورِ اولِ هر یک از x_j ها را با μ، گشتاورِ m ُمِ هر یک از $(x_j - \langle x_j\rangle)$ ها را با μ'_m، و وردایی یِ هر یک از x_j ها را با V نشان میدهم:

$$\mu = \langle x_j\rangle. \tag{49}$$

$$\mu'_m = \langle (x_j - \langle x_j\rangle)^m\rangle. \tag{50}$$

$$V = \langle (x_j - \langle x_j\rangle)^2\rangle. \tag{51}$$

رُشن است که V وردایی یِ هر یک از $(x_j - \langle x_j\rangle)$ ها هم هست، و البته،

$$V = \mu'_2. \tag{52}$$

دیده میشود

$$W'_x(u) = \frac{V\,u^2}{2} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{c_m\,u^m}{m!}. \tag{53}$$

پس،

$$W'_y(u) = n\,\frac{V\,u^2}{2} + n\,\sum_{m=3}^{\infty} \frac{c_m\,u^m}{m!}. \tag{54}$$

متغیرِ تصادفی یِ z را چنین تعریف میکنم.

$$z = \frac{y - \langle y\rangle}{\sqrt{n}}. \tag{55}$$

از تعریفِ تابع-ِ-مولد، رابطه یِ (6)، دیده میشود

$$Z_z(v) = Z'_y\left(\frac{v}{\sqrt{n}}\right). \tag{56}$$

پس،

$$W_z(v) = W'_y\left(\frac{v}{\sqrt{n}}\right). \tag{57}$$

در نتیجه،

$$W_z = W_{z\,0} + W_{z\,\mathrm{I}}. \tag{58}$$

که،

$$W_{z\,0}(v) = \frac{V\,v^2}{2}. \tag{59}$$

$$W_{z\,\mathrm{I}}(v) = \sum_{m=3}^{\infty} n^{-(m-2)/2}\,\frac{c_m\,v^m}{m!}. \tag{60}$$

به این ترتیب،

$$\rho_{z\,0}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,V}}\,\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\,V}\right). \tag{61}$$

و البته، مشابه با (33)،

$$\rho_z = \exp([W_{z\,\mathrm{I}}(-\mathrm{D})]\,\rho_{z\,0}. \tag{62}$$

دیده میشود وقت ی n به بینهایت میگراید، $W_{z\,\mathrm{I}}$ به صفر میگراید. و در نتیجه ρ_z به $\rho_{z\,0}$ میگراید، یعنی تُزیعِ z گاؤسی میشود. رابطه یِ (62) یک بسط برا یِ ρ_z بر حسبِ توانها یِ منفی یِ n است:

$$\rho_z(\zeta) = \Bigg[1 - n^{-1/2}\,\frac{c_3}{6}\,\left(\frac{3\,\zeta}{V^2} - \frac{\zeta^3}{V^3}\right) + n^{-1}\,\frac{c_4}{24}\,\left(\frac{3}{V^2} - \frac{6\,\zeta^2}{V^3} + \frac{\zeta^4}{V^4}\right) + \cdots\Bigg]\,\rho_{z\,0}(\zeta). \tag{63}$$

البته اینها را میشود بر حسبِ متغیرِ y هم نوشت:

$$\rho'_{y\,0}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,n\,V}}\,\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\,n\,V}\right). \tag{64}$$

$$W'_{y\,\mathrm{I}}(u) = n\,\sum_{m=3}^{\infty}\frac{c_m\,u^m}{m!}. \tag{65}$$

$$\rho'_y = \exp([W'_{y\,\mathrm{I}}(-\mathrm{D})]\,\rho'_{y\,0}. \tag{66}$$

به این ترتیب،

$$\rho'_y(\xi) = \left[1 + n^{-1}\,\left(-\frac{c_3}{6}\,\frac{3\,\xi}{V^2} + \frac{c_4}{24}\,\frac{3}{V^2}\right) + \cdots\right]\rho'_{y\,0}(\xi). \tag{67}$$

4 مثالها

دُ مثال را بررسی میکنم. تُزیعِ دُ-جملِئی و تُزیعِ پُوَسُن [2].

4.1 تُزیعِ دُ-جملِئی

هر یک از x_j ها را یک متغیر-ِ-تصادفی ست که 2 مقدارِ a و b میگیرد، با احتمالها یی که، به ترتیب، p و q اند:

$$P_a = p. \tag{68}$$

$$P_b = q. \tag{69}$$

و البته p و q نامنفی یَند و

$$p + q = 1. \tag{70}$$

به این ترتیب،

$$Z_x(u) = p\ \exp(a\,u) + q\ \exp(b\,u). \tag{71}$$

از اینجا،

$$\mu = p\,a + q\,b. \tag{72}$$

$$V = p\,q\,(b-a)^2. \tag{73}$$

$$c_3 = p\,q\,(q-p)\,(b-a)^3. \tag{74}$$

$$c_4 = p\,q\,(1 - 6\,p\,q)\,(b-a)^4. \tag{75}$$

4.2 تُزیعِ پُوَسُن

هر یک از x_j ها را یک متغیرِ-تصادفی ست که همه یِ مقدارها یِ صحیحِ نامنفی را میگیرد، چنان که

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!}\ \exp(-\lambda). \tag{76}$$

و البته λ مثبت است. دیده میشود

$$Z_x(u) = \exp\{\lambda\,[\exp(u) - 1]\}. \tag{77}$$

$$W_x(u) = \lambda\,[\exp(u) - 1]. \tag{78}$$

به این ترتیب،

$$W_y(u) = n\,\lambda\,[\exp(u) - 1]. \tag{79}$$

پس y هم تُزیعِ پُوَسُن [2] دارد، البته با پارامترِ $(n\,\lambda)$ به جا یِ λ. همچنین،

$$c_m = \lambda, \quad m > 1. \tag{80}$$

از جمله،

$$\mu = \lambda. \tag{81}$$

$$V = \lambda. \tag{82}$$

5 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «چگالی یِ احتمال، و تابعِ مولد I» (2021/04/24) X1-155

[2] Poisson