X1-158 (2021/08/27)

میدانِ الکترُمغناطیسی، لَگرانژی و هَمیلتِنی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

لَگرانژی و هَمیلتِنی برا یِ میدانِ الکترُمغناطیسی با چشمه بررسی میشوند. فضا-زمانِ زمینه، لزومَن تخت نیست. همچنین، تحقیق میشود معادله یِ حرکت در فضا یِ فاز به هم ان معادله یِ حرکت در فضا یِ پیکربندی مینجامد.

0 قراردادها

مئلفه یِ زمانی با شاخصِ 0 نشان داده میشود. از جمله،

$$r^0 = t. \tag{1}$$

که t زمانِ رویدادِ r است:

$$r = (t, \boldsymbol{r}). \tag{2}$$

که $\boldsymbol{r}$ مکانِ رویدادِ r است. شاخصها یِ لاتین فقط مقدارها یِ ناصفر (فضایی) میگیرند. شاخصها یِ یونانی، هم مقدارِ زمانی (0) و هم مقدارِ فضایی میگیرند. از جمله،

$$r^i = \boldsymbol{r}^i. \tag{3}$$

نشانگانِ متریکِ فضا-زمان $(+, \dots, +, -)$ است. متریک را با g و ویژه-زمان را با τ نشان میدهم:

$$-c^2\,\mathrm{d}\,\tau^2 = g_{\alpha\,\beta}\,\mathrm{d}\,r^\alpha\,\mathrm{d}\,r^\beta. \tag{4}$$

شاخصها با g پایین-ُ-بالا میروند:

$$\mathfrak{X}_\alpha = g_{\alpha\,\beta}\,\mathfrak{X}^\beta. \tag{5}$$

$$\mathfrak{X}^\alpha = g^{\beta\,\alpha}\,\mathfrak{X}_\beta. \tag{6}$$

و البته،

$$g_{\alpha\,\beta}\,g^{\gamma\,\beta} = \delta^\alpha_\gamma. \tag{7}$$

دترمینانِ ماتریسِ متریک را با $\mathfrak{D}$ نشان میدهم، و $\mathfrak{g}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{g} = \frac{\sqrt{|\mathfrak{D}|}}{c}. \tag{8}$$

عنصر-ِ-حجم در فضا-زمان را با $(\mathrm{d}\,V)$ نشان میدهم:

$$\mathrm{d}\,V = \mathfrak{g}\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}^n\,\boldsymbol{r}. \tag{9}$$

یا،

$$\mathrm{d}\,V = \mathfrak{g}\,\mathrm{d}^{n+1}\,r. \tag{10}$$

که n بُعدِ فضا ست.

برا یِ میدانِ الکترُمغناطیسی قراردادها یِ $\mathrm{S\,I}$ را به کار میبَرم. نیرو یِ $\boldsymbol{F}$ وارد بر یک ذره به بارِ q با سرعتِ $\boldsymbol{v}$ چنین است.

$$F_i = q\,(E_i + B_{i\,j}\,v^j). \tag{11}$$

که $\boldsymbol{E}$ میدانِ الکتریکی و $\boldsymbol{B}$ میدانِ مغناطیسی ست. $\boldsymbol{B}$ پادمتقارن است. البته رابطه یِ (11) را میشود چنین نوشت.

$$F_i = q\,B_{i\,\beta}\,v^\beta. \tag{12}$$

که،

$$B_{i\,0} = E_i. \tag{13}$$

رابطه یِ (12) به این گسترش میابد.

$$F_\alpha = q\,B_{\alpha\,\beta}\,v^\beta. \tag{14}$$

که B پادمتقارن است و F_0 برابر است با منفی یِ توانِ (مشتقِ زمانی یِ انرژی یِ) ذره.

معادلاتِ با-چشمه یِ مَکسوِل [1] هم میشوند

$$(\partial_\beta\,B)^{\alpha\,\beta} = \mu_0\,J^\alpha. \tag{15}$$

که

$$J = (\rho, \boldsymbol{J}). \tag{16}$$

$\boldsymbol{J}$ چگالی-ی-جریان، و ρ چگالی-یِ-بار است:

$$J^0 = \rho. \tag{17}$$

سرانجام، معادلاتِ بی-چشمه یِ مَکسوِل [1] همئرزَند با

$$B_{\alpha\,\beta} = \partial_\alpha\,A_\beta - \partial_\beta\,A_\alpha. \tag{18}$$

که A پتانسیل است، شاملِ پتانسیل- ِ-اسکالرِ ϕ و پتانسیل- ِ-برداری یِ $\boldsymbol{A}$:

$$A = (-\phi, \boldsymbol{A}). \tag{19}$$

از جمله،

$$A^0 = -\phi. \tag{20}$$

1 لَگرانژی

کنشِ S بر حسبِ چگالی-یِ-لَگرانژی یِ $\mathcal{L}$ چنین است

$$S = \int \mathrm{d}^{n+1} r \, \mathcal{L}. \tag{21}$$

یا،

$$S = \int \mathrm{d} V \, \tilde{\mathcal{L}}. \tag{22}$$

که،

$$\mathcal{L} = \mathfrak{g} \, \tilde{\mathcal{L}}. \tag{23}$$

برا یِ میدانِ الکترُمغناطیسی،

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4\,\mu_0} \, B^{\alpha\,\beta} \, B_{\alpha\,\beta} + J^\alpha \, A_\alpha. \tag{24}$$

دیده میشود

$$\frac{\partial \, \mathcal{L}}{\partial \, A_\alpha} = \mathfrak{g} \, J^\alpha. \tag{25}$$

$$\frac{\partial \, \mathcal{L}}{\partial \, (\partial_\beta \, A_\alpha)} = \frac{\mathfrak{g}}{\mu_0} \, B^{\alpha\,\beta}. \tag{26}$$

معادله یِ حرکت میشود

$$\mathcal{E}^{\alpha} \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{27}$$

که $\overset{\text{ns}}{=}$ یعنی «بر-لاک برابر است»، و

$$\mathcal{E}^{\alpha} = \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,A_{\alpha}} - \partial_{\beta}\,\left[\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,(\partial_{\beta}\,A_{\alpha})}\right]. \tag{28}$$

پس،

$$\mathcal{E}^{\alpha} = \mathfrak{g}\,J^{\alpha} - \partial_{\beta}\,\left(\frac{\mathfrak{g}}{\mu_0}\,B^{\alpha\,\beta}\right). \tag{29}$$

یا،

$$\mathcal{E}^{\alpha} = \mathfrak{g}\,\tilde{\mathcal{E}}^{\alpha}. \tag{30}$$

که،

$$\tilde{\mathcal{E}}^{\alpha} = J^{\alpha} - \frac{1}{\mu_0\,\mathfrak{g}}\,\partial_{\beta}\,(\mathfrak{g}\,B^{\alpha\,\beta}). \tag{31}$$

دیده میشود (27) همئرز است با

$$\tilde{\mathcal{E}}^{\alpha} \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{32}$$

همچنین،

$$\frac{1}{\mathfrak{g}}\,\partial_{\beta}\,(\mathfrak{g}\,B^{\alpha\,\beta}) = (\partial_{\beta}\,B)^{\alpha\,\beta}. \tag{33}$$

پس

$$\tilde{\mathcal{E}}^{\alpha} = J^{\alpha} - \frac{1}{\mu_0}\,(\partial_{\beta}\,B)^{\alpha\,\beta}. \tag{34}$$

پس معادله-یِ-حرکتها یِ همئرز-با-همِ (27) و (32)، هم ان (15) اند.

2 هَمیلتِنی در فضا یِ پیکربندی

تکانه یِ متناظر با A را با Π نشان میدهم:

$$\Pi^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\,(\partial_0\,A_{\alpha})}. \tag{35}$$

از (26) دیده میشود

$$\Pi^{\alpha} = \frac{\mathfrak{g}}{\mu_0}\,B^{\alpha\,0}. \tag{36}$$

چگالی یِ هَمیلتِنی را با $\mathcal{H}$ نشان میدهم:

$$\mathcal{H} = -\mathcal{L} + \Pi^{\alpha}\,\partial_0\,A_{\alpha}. \tag{37}$$

یا،

$$\mathcal{H} = -\mathcal{L} + \Pi^{i}\,\partial_0\,A_i + \chi\,(\partial_0\,\phi). \tag{38}$$

که χ تکانه یِ متناظر با ϕ است:

$$\chi = -\Pi^0. \tag{39}$$

به این ترتیب،

$$\mathcal{H} = \frac{\mathfrak{g}}{\mu_0}\,\left(B^{i\,0}\,\partial_0\,A_i + \frac{1}{4}\,B^{\alpha\,\beta}\,B_{\alpha\,\beta}\right) - \mathfrak{g}\,J^{\alpha}\,A_{\alpha} + \chi\,(\partial_0\,\phi). \tag{40}$$

دیده میشود،

$$B^{i\,0}\,\partial_0\,A_i = B^{i\,0}\,(\partial_0\,A_i - \partial_i\,A_0) + B^{i\,0}\,\partial_i\,A_0. \tag{41}$$

که یعنی،

$$B^{i\,0}\,\partial_0\,A_i = -B^{i\,0}\,B_{i\,0} + B^{i\,0}\,\partial_i\,A_0. \tag{42}$$

همچنین،

$$B^{\alpha\,\beta}\,B_{\alpha\,\beta}=2\,B^{i\,0}\,B_{i\,0}+B^{i\,j}\,B_{i\,j}. \tag{43}$$

پس،

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_{\mathrm{p}}+\mathcal{H}_{\mathrm{c}}. \tag{44}$$

که،

$$\mathcal{H}_{\mathrm{p}}=\frac{\mathfrak{g}}{\mu_0}\,\left(-\frac{1}{2}\,B^{i\,0}\,B_{i\,0}+\frac{1}{4}\,B^{i\,j}\,B_{i\,j}\right)-\mathfrak{g}\,J^{\alpha}\,A_{\alpha}+\chi\,(\partial_0\,\phi). \tag{45}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{c}}=\frac{\mathfrak{g}}{\mu_0}\,B^{i\,0}\,\partial_i\,A_0. \tag{46}$$

سرانجام،

$$\mathcal{H}_{\mathrm{c}}=\mathcal{H}_{\mathrm{c\,a}}+\mathcal{H}_{\mathrm{d}}. \tag{47}$$

که،

$$\mathcal{H}_{\mathrm{c\,a}}=-\frac{1}{\mu_0}\,A_0\,\partial_i\,(\mathfrak{g}\,B^{i\,0}). \tag{48}$$

یا،

$$\mathcal{H}_{\mathrm{c\,a}}=-\frac{\mathfrak{g}}{\mu_0}\,A_0\,(\partial_i\,B)^{i\,0}. \tag{49}$$

و

$$\mathcal{H}_{\mathrm{d}}=\frac{1}{\mu_0}\,\partial_i\,(\mathfrak{g}\,A_0\,B^{i\,0}). \tag{50}$$

یا،

$$\mathcal{H}_{\mathrm{d}}=\frac{1}{\mu_0}\,\partial_{\alpha}\,(\mathfrak{g}\,A_0\,B^{\alpha\,0}). \tag{51}$$

به این ترتیب،

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\rm a} + \mathcal{H}_{\rm d}. \tag{52}$$

که،

$$\mathcal{H}_{\rm a} = \mathcal{H}_{\rm p} + \mathcal{H}_{\rm c\,a}. \tag{53}$$

دیده میشود $\mathcal{H}_{\rm d}$ یک دیورژانسِ کامل است. پس در معادلات- ِ-حرکت اثر ی ندارد. و البته $\mathcal{H}$ چنین میشود.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\rm p} + \mathcal{H}_{\rm c\,a} + \mathcal{H}_{\rm d}. \tag{54}$$

3 هَمیلتِنی در فضا یِ فاز

هَمیلتنی در فضا یِ فاز، بر حسبِ متغیرها یِ فضا یِ پیکربندی و تکانِها یِ متناظر (به جا یِ مشتقِ زمانی یِ متغیرها یِ فضا-یِ-پیکربندی) نوشته میشود. (36) را در (48) و (50) میگذارم:

$$\mathcal{H}_{\rm c\,a} = -A_0\,\partial_i\,\Pi^i. \tag{55}$$

$$\mathcal{H}_{\rm d} = \partial_i\,(A_0\,\Pi^i). \tag{56}$$

شکلِ $\mathcal{H}_{\rm p}$ در فضا یِ پیکربندی، در (45) آمده. در این شکل، در $B_{i\,j}$ مشتقِ زمانی یِ متغیرها یِ فضا-یِ-پیکربندی ظاهر نشده. $B^{i\,0}$ هم بر حسبِ Π^i نوشته میشود، رابطه یِ (36). میماند $B^{i\,j}$ و $B_{i\,0}$. میخاهم اینها را بر حسبِ $B_{k\,l}$ ها و $B^{k\,0}$ ها بنویسم. برا یِ این کار تانسُرِ کمکی یِ h را وارد میکنم:

$$h^{\alpha\,\beta} = g^{\alpha\,\beta} - \frac{g^{\alpha\,0}\,g^{0\,\beta}}{g^{0\,0}}. \tag{57}$$

چون g متقارن است، h هم متقارن است. از تعریفِ h، رابطه یِ (57)، نتیجه میشود

$$g^{\alpha\,\beta} = h^{\alpha\,\beta} + \frac{g^{\alpha\,0}\,g^{0\,\beta}}{g^{0\,0}}. \tag{58}$$

همچنین،

$$h^{0\,\alpha}=0. \tag{59}$$

$$h_{i\,\alpha}=g_{i\,\alpha}. \tag{60}$$

دیده میشود

$$B^{i\,j}=g^{\alpha\,i}\,g^{\beta\,j}\,B_{\alpha\,\beta}. \tag{61}$$

پس،

$$\begin{aligned}B^{i\,j}&=\left(h^{\alpha\,i}+\frac{g^{\alpha\,0}\,g^{0\,i}}{g^{0\,0}}\right)\left(h^{\beta\,j}+\frac{g^{\beta\,0}\,g^{0\,j}}{g^{0\,0}}\right)B_{\alpha\,\beta},\\&=h^{\alpha\,i}\,h^{\beta\,j}\,B_{\alpha\,\beta}+\frac{h^{\alpha\,i}\,g^{0\,j}\,B_{\alpha}{}^{0}+h^{\beta\,j}\,g^{0\,i}\,B^{0}{}_{\beta}}{g^{0\,0}}\\&\quad+\frac{g^{0\,i}\,g^{0\,j}\,B^{0\,0}}{(g^{0\,0})^2}.\end{aligned} \tag{62}$$

B پادمتقارن است. پس

$$B^{0\,0}=0. \tag{63}$$

در طرف ِ راست ِ (62)، جمله ی ِآخر صفر است. در جمله ی ِ دوم هم پادتقارن ِ B را به کار میبَرم:

$$B^{i\,j}=h^{\alpha\,i}\,h^{\beta\,j}\,B_{\alpha\,\beta}+\frac{h^{i}_{\alpha}\,g^{0\,j}-h^{j}_{\alpha}\,g^{0\,i}}{g^{0\,0}}\,B^{\alpha\,0}. \tag{64}$$

در طرف ِ راست، در جمله ی ِ اول (59) و در جمله ی ِ دوم (63) را به کار میبَرم:

$$B^{i\,j}=h^{k\,i}\,h^{l\,j}\,B_{k\,l}+\frac{h^{i}_{k}\,g^{0\,j}-h^{j}_{k}\,g^{0\,i}}{g^{0\,0}}\,B^{k\,0}. \tag{65}$$

این هم، با استفاده از (60)، چنین میشود.

$$B^{i\,j}=h^{k\,i}\,h^{l\,j}\,B_{k\,l}+\frac{g^{i}_{k}\,g^{0\,j}-g^{j}_{k}\,g^{0\,i}}{g^{0\,0}}\,B^{k\,0}. \tag{66}$$

اما،

$$g_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta. \tag{67}$$

با استفاده از (63) و (67)، رابطه یِ (66) چنین میشود.

$$B^{i\,j} = h^{k\,i}\,h^{l\,j}\,B_{k\,l} + \frac{g^{0\,j}\,B^{i\,0} - g^{0\,i}\,B^{j\,0}}{g^{0\,0}}. \tag{68}$$

به این ترتیب،

$$B^{i\,j}\,B_{i\,j} = h^{k\,i}\,h^{l\,j}\,B_{k\,l}\,B_{i\,j} + 2\,\frac{g^{0\,j}}{g^{0\,0}}\,B^{i\,0}\,B_{i\,j}. \tag{69}$$

همچنین،

$$B_i{}^0 = g_{i\,\alpha}\,B^{\alpha\,0}. \tag{70}$$

که، با استفاده از (63)، میشود

$$B_i{}^0 = g_{i\,j}\,B^{j\,0}. \tag{71}$$

و

$$B_i{}^0 = g^{\alpha\,0}\,B_{i\,\alpha}. \tag{72}$$

یا،

$$B_i{}^0 = g^{0\,0}\,B_{i\,0} + g^{j\,0}\,B_{i\,j}. \tag{73}$$

از (71) و (73) نتیجه میشود

$$B_{i\,0} = \frac{g_{i\,j}}{g^{0\,0}}\,B^{j\,0} - \frac{g^{j\,0}}{g^{0\,0}}\,B_{i\,j}. \tag{74}$$

به این ترتیب،

$$B^{i\,0}\,B_{i\,0} = \frac{g_{i\,j}}{g^{0\,0}}\,B^{i\,0}\,B^{j\,0} - \frac{g^{j\,0}}{g^{0\,0}}\,B^{i\,0}\,B_{i\,j}. \tag{75}$$

با استفاده از روابطِ (69) و (75)، رابطه یِ (45) چنین میشود.

$$\mathcal{H}_{\rm p}=\frac{\mathfrak{g}}{\mu_0}\;\left(-\frac{g_{i\,j}}{2\,g^{0\,0}}\,B^{i\,0}\,B^{j\,0}+\frac{g^{j\,0}}{g^{0\,0}}\,B^{i\,0}\,B_{i\,j}+\frac{h^{k\,i}\,h^{l\,j}}{4}\,B_{k\,l}\,B_{i\,j}\right)$$
$$-\,\mathfrak{g}\,J^\alpha\,A_\alpha+\chi\,(\partial_0\,\phi). \tag{76}$$

در جملاتِ اول و دومِ پرانتز هم (36) را به کار میبَرم:

$$\mathcal{H}_{\rm p}=-\frac{\mu_0\,g_{i\,j}}{2\,\mathfrak{g}\,g^{0\,0}}\,\Pi^i\,\Pi^j+\frac{g^{j\,0}}{g^{0\,0}}\,\Pi^i\,B_{i\,j}+\frac{\mathfrak{g}\,h^{k\,i}\,h^{l\,j}}{4\,\mu_0}\,B_{k\,l}\,B_{i\,j}$$
$$-\,\mathfrak{g}\,J^\alpha\,A_\alpha+\chi\,(\partial_0\,\phi). \tag{77}$$

و میشود (55) و (56) و (78) را چنین نوشت.

$$\mathcal{H}_{\rm c\,a}=\phi\,\partial_i\,\Pi^i. \tag{78}$$

$$\mathcal{H}_{\rm d}=-\partial_i\,(\phi\,\Pi^i). \tag{79}$$

$$\mathcal{H}_{\rm p}=-\frac{\mu_0\,g_{i\,j}}{2\,\mathfrak{g}\,g^{0\,0}}\,\Pi^i\,\Pi^j+\frac{g^{j\,0}}{g^{0\,0}}\,\Pi^i\,B_{i\,j}+\frac{\mathfrak{g}\,h^{k\,i}\,h^{l\,j}}{4\,\mu_0}\,B_{k\,l}\,B_{i\,j}-\mathfrak{g}\,J^i\,A_i$$
$$+\,\mathfrak{g}\,\rho\,\phi+\chi\,(\partial_0\,\phi). \tag{80}$$

مشتقِ ϕ نسبت به زمان را نمیشود بر حسبِ تکانه نوشت: چنان که از (36) دیده میشود،

$$\chi=0. \tag{81}$$

پس $(\partial_0\,\phi)$ نامعین میمانَد. این مقدارِ نامعین را با λ نشان میدهم:

$$\partial_0\,\phi=\lambda. \tag{82}$$

به این ترتیب،

$$\mathcal{H}_{\rm p}=-\frac{\mu_0\,g_{i\,j}}{2\,\mathfrak{g}\,g^{0\,0}}\,\Pi^i\,\Pi^j+\frac{g^{j\,0}}{g^{0\,0}}\,\Pi^i\,B_{i\,j}+\frac{\mathfrak{g}\,h^{k\,i}\,h^{l\,j}}{4\,\mu_0}\,B_{k\,l}\,B_{i\,j}-\mathfrak{g}\,J^i\,A_i$$
$$+\,\mathfrak{g}\,\rho\,\phi+\lambda\,\chi. \tag{83}$$

و

$$\mathcal{H}_{\mathsf{a}} = -\frac{\mu_0\, g_{i\,j}}{2\,\mathfrak{g}\, g^{0\,0}}\,\Pi^i\,\Pi^j + \frac{g^{j\,0}}{g^{0\,0}}\,\Pi^i\,B_{i\,j} + \frac{\mathfrak{g}\,h^{k\,i}\,h^{l\,j}}{4\,\mu_0}\,B_{k\,l}\,B_{i\,j} - \mathfrak{g}\,J^i\,A_i$$
$$+\,\phi\,(\mathfrak{g}\,\rho + \partial_i\,\Pi^i) + \lambda\,\chi. \tag{84}$$

4 معادله یِ حرکت در فضا یِ فاز

معادله-یِ-حرکتها برا یِ پتانسیل و تکانه یِ آن چنین اند.

$$\frac{\partial\,\phi}{\partial\,t} \overset{\mathrm{ns}}{=} \frac{\delta\,H_{\mathsf{a}}}{\delta\,\chi}. \tag{85}$$
$$\frac{\partial\,\chi}{\partial\,t} \overset{\mathrm{ns}}{=} -\frac{\delta\,H_{\mathsf{a}}}{\delta\,\phi}. \tag{86}$$
$$\frac{\partial\,A_i}{\partial\,t} \overset{\mathrm{ns}}{=} \frac{\delta\,H_{\mathsf{a}}}{\delta\,\Pi^i}. \tag{87}$$
$$\frac{\partial\,\Pi^i}{\partial\,t} \overset{\mathrm{ns}}{=} -\frac{\delta\,H_{\mathsf{a}}}{\delta\,A_i}. \tag{88}$$

که،

$$H_{\mathsf{a}} = \int \mathrm{d}^n\,r\,\mathcal{H}_{\mathsf{a}}. \tag{89}$$
$$\frac{\delta\,H_{\mathsf{a}}}{\delta\,\mathfrak{X}} = \frac{\partial\,\mathcal{H}_{\mathsf{a}}}{\partial\,\mathfrak{X}} - \partial_i\,\left[\frac{\partial\,\mathcal{H}_{\mathsf{a}}}{\partial\,(\partial_i\,\mathfrak{X})}\right]. \tag{90}$$

معادله یِ (85) هم ان (82) است:

$$\partial_0\,\phi \overset{\mathrm{ns}}{=} \lambda. \tag{91}$$

که از آن ($\partial_0\,\phi$) نامعین میمانَد، چون λ نامعین است. از (81) دیده میشود

$$\chi \overset{\mathrm{ns}}{=} 0. \tag{92}$$

پس،

$$\frac{\partial\,\chi}{\partial\,t} \overset{\mathrm{ns}}{=} 0. \tag{93}$$

این یعنی طرفِ راستِ (86) صفر است. پس،

$$\psi \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{94}$$

که،

$$\psi = \frac{\delta\, H_{\mathtt{a}}}{\delta\, \phi}. \tag{95}$$

که، با استفاده از (84)، میشود

$$\psi = \mathfrak{g}\, \rho + \partial_i\, \Pi^i. \tag{96}$$

به این ترتیب معادلات- ِ-حرکت میشوند معادلاتِ (87) و (88):

$$\frac{\partial\, A_i}{\partial\, t} = -\frac{\mu_0\, g_{i\,j}}{\mathfrak{g}\, g^{0\,0}}\, \Pi^j + \frac{g^{j\,0}}{g^{0\,0}}\, B_{i\,j} - \partial_i\, \phi. \tag{97}$$

$$\frac{\partial\, \Pi^i}{\partial\, t} = \partial_j\, \left(\frac{g^{i\,0}\, \Pi^j - g^{j\,0}\, \Pi^i}{g^{0\,0}} - \frac{\mathfrak{g}\, h^{k\,i}\, h^{l\,j}}{\mu_0}\, B_{k\,l}\right) + \mathfrak{g}\, J^i. \tag{98}$$

که البته باید به آنها معادله یِ (82) و قیدها یِ (92) و (94) را هم افزود. از (97) میشود بخشِ فضایی یِ Π را حساب کرد:

$$\frac{\mu_0\, g_{i\,j}}{\mathfrak{g}}\, \Pi^j \overset{\text{ns}}{=} g^{j\,0}\, B_{i\,j} + g^{0\,0}\, (\partial_i\, A_0 - \partial_0\, A_i). \tag{99}$$

یا،

$$\frac{\mu_0\, g_{i\,j}}{\mathfrak{g}}\, \Pi^j \overset{\text{ns}}{=} g^{\alpha\,0}\, B_{i\,\alpha}. \tag{100}$$

که یعنی،

$$\frac{\mu_0\, g_{i\,j}}{\mathfrak{g}}\, \Pi^j \overset{\text{ns}}{=} B_i{}^0. \tag{101}$$

یا،

$$\frac{\mu_0\, g^i_j}{\mathfrak{g}}\, \Pi^j \overset{\text{ns}}{=} B^{i\,0}. \tag{102}$$

که، با استفاده از (67)، میشود

$$\Pi^i \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathfrak{g}}{\mu_0}\, B^{i\,0}. \tag{103}$$

این بخشِ فضایی یِ (36) است. که البته قابل- ِ-انتظار هم هست. معادله-یِ-حرکتِ هَمیلتِنی برا یِ مختصات، با معادله یِ تعریفِ تکانه با لَگرانژی همئرز است. (103) را در (98) میگذارم:

$$\mu_0\, \mathfrak{g}\, J^i \stackrel{\text{ns}}{=} \partial_0\, (\mathfrak{g}\, B^{i\,0}) + \partial_j\, \left[\mathfrak{g}\, \left(\frac{g^{i\,0}\, B^{0\,j} + g^{j\,0}\, B^{i\,0}}{g^{0\,0}} + h^{k\,i}\, h^{l\,j}\, B_{k\,l}\right)\right]. \tag{104}$$

که، با استفاده از (69)، چنین میشود.

$$\mu_0\, \mathfrak{g}\, J^i \stackrel{\text{ns}}{=} \partial_0\, (\mathfrak{g}\, B^{i\,0}) + \partial_j\, (\mathfrak{g}\, B^{i\,j}). \tag{105}$$

یا،

$$\mu_0\, \mathfrak{g}\, J^i \stackrel{\text{ns}}{=} \partial_\alpha\, (\mathfrak{g}\, B^{i\,\alpha}). \tag{106}$$

از (29) دیده میشود این بخشِ فضایی یِ (27) است. همچنین، (103) را در (94) میگذارم:

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \mu_0\, \mathfrak{g}\, \rho + \partial_i\, (\mathfrak{g}\, B^{i\,0}). \tag{107}$$

از (29) دیده میشود این بخشِ زمانی یِ (27) است.

5 پانوشتها

[1] Maxwell